

+1/31+... Cette somme d'inverses est une façon de mesurer la petitesse des termes de la suite, car plus une suite est petite à l'infini, plus la somme de ses inverses est grande.

Pour construire la suite de Mian-Chowla, on a utilisé à chaque fois le plus petit nombre permettant de compléter ce que l'on connaît déjà (algorithme glouton). On s'attendait donc à ce que la somme des inverses des termes de la suite soit la plus grande possible pour une suite (a_i) vérifiant $0 < a_i < a_j$ pour $i < j$ et ayant toutes les sommes $a_i + a_j$ avec $i \geq j$ différentes.

Or ce n'est pas vrai ! Ce résultat provient du chercheur chinois Zhenxiang Zhang. Il a considéré la suite (a_i') ayant les mêmes termes que a_i jusqu'au quatorzième, qui est 182, puis au lieu de prendre 204, il a pris 229, qui convient pour que toutes les cases rouges de la table d'addition de $\{1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 229\}$ soient différentes. Il a alors poursuivi sa suite en utilisant le principe de l'algorithme glouton. Cette nouvelle suite porte le nom bien sûr de « suite de Zhang » et elle est présente dans l'encyclopédie de Neil Sloane sous le numéro A259964 : 1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 229, 257, 290, 312, 381, 419, 467, 507, 621, 721, 770, 864, 927, 1050, 1178, 1289, ...

Zhenxiang Zhang a montré que la somme des inverses des termes de la suite de Mian-Chowla est inférieure à 2,1596, alors que la somme des inverses des termes de sa suite est supérieure à 2,1597. Au sens de la somme des inverses, la suite de Zhang est donc meilleure que la suite de Mian-Chowla.

La raison de ce qui apparaît comme un paradoxe est que, même si l'on utilise l'algorithme glouton pour compléter la suite de Zhang après 229, les nombres qui viennent sont un peu plus petits que ceux de la suite de Mian-Chowla et que le léger désavantage que Zhenxiang Chang a accepté en prenant 229 au lieu de 204 est compensé par ce qui vient au-delà. En un mot : Zhenxiang Zhang accepte de se laisser dépasser en prenant 229, mais il compense plus loin ce handicap et termine gagnant !

On ignore aujourd'hui quelle est, dans l'absolu, la suite optimale pour les tables d'addition qui donne une somme des inverses la plus grande possible, ni même si cela existe puisqu'il se peut que toute valeur atteinte par une suite optimale soit battue par une autre. Gregory Yovanof et Herbert Taylor ont cependant démontré en 2000 qu'on pouvait faire mieux que la suite de Zhang et dépasser 2,1600383 pour la somme des inverses. À propos des tables d'addition, on se trouve donc face à une question non résolue et probablement difficile.

Les suites de Mian-Chowla et de Zhang donnent des tables d'addition optimales : leurs cases rouges sont toutes différentes jusqu'à l'infini. Il existe cependant bien d'autres

3



L'ALGORITHME GLOUTON

Pour calculer les suites de l'encadré 2 et de nombreuses suites mentionnées dans le présent article, on utilise des algorithmes « gloutons ». L'idée est de décomposer la recherche d'un objet en une série d'étapes et de se contenter de la meilleure solution possible à chaque étape, en espérant que, quand on regroupera le résultat des étapes successives, on aura la meilleure solution possible globalement. À défaut de produire la meilleure solution recherchée, l'algorithme donne souvent une assez bonne solution. L'intérêt est que ces algorithmes gloutons sont rapides comparés aux méthodes qui rechercheraient dans tout l'espace des solutions possibles. Parfois on démontre que l'algorithme glouton donne globalement la meilleure solution.

Considérons par exemple le problème consistant à atteindre une somme donnée N avec le moins de pièces possibles quand on dispose de pièces de monnaies de 1, 2, 5, 10, 20, 50 et 100 unités. Pour atteindre la somme N , l'algorithme glouton propose d'utiliser étape par étape la plus grande pièce possible inférieure ou égale à la somme qui reste à atteindre. Pour

$N = 66$, il donnera donc la consigne de prendre 50, puis 10, puis 5, puis 1. Quand les pièces disponibles sont 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, on démontre que cette solution, obtenue rapidement, sera toujours la meilleure en nombre de pièces. L'algorithme glouton est dans ce cas parfaitement satisfaisant, heureusement ce sont les dénominations utilisées dans notre monnaie.

En revanche, si les pièces disponibles sont 1, 3, 4, 10, 30, 40 et 100, pour atteindre 66 l'algorithme glouton indiquera « prendre 40, puis 10, puis 10, puis 4, puis 1, puis 1 » alors que « prendre 30, puis 30, puis 3, puis 3 » est meilleur.

Dans cet exemple, l'algorithme glouton est imparfait. Un autre exemple est donné dans le texte avec la suite de Zhang pour trouver une suite dont les tables d'addition contiennent toujours $n(n+1)/2$ éléments différents, et dont on veut aussi que la somme des inverses soit la plus grande possible. Dans ce cas, le problème de maximiser la suite des inverses est associé à un espace de recherche infini et on ne sait pas aujourd'hui le résoudre globalement.

séquences de cette catégorie, dont toutes celles partant d'une séquence convenable finie et procédant ensuite par l'algorithme glouton pour continuer. Les suites obtenues par ce moyen semblent malheureusement toutes plus ou moins aléatoires : pour en connaître les termes, il faut procéder pas à pas et on ne sait pas à l'avance ce qu'on trouvera.

LES PUISSANCES DE 2

Cependant, la suite très simple des puissances de deux, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n ,... est aussi optimale pour l'addition et ses termes sont faciles à anticiper et à écrire... du moins en base 2. En effet, deux cases rouges de la table d'addition pour $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n\}$ ne peuvent pas être égales. Voici le >