

+1/31+... Cette somme d'inverses est une façon de mesurer la petitesse des termes de la suite, car plus une suite est petite à l'infini, plus la somme de ses inverses est grande.

Pour construire la suite de Mian-Chowla, on a utilisé à chaque fois le plus petit nombre permettant de compléter ce que l'on connaît déjà (algorithme glouton). On s'attendait donc à ce que la somme des inverses des termes de la suite soit la plus grande possible pour une suite (a_i) vérifiant $0 < a_i < a_j$ pour $i < j$ et ayant toutes les sommes $a_i + a_j$ avec $i \geq j$ différentes.

Or ce n'est pas vrai ! Ce résultat provient du chercheur chinois Zhenxiang Zhang. Il a considéré la suite (a_i') ayant les mêmes termes que a_i jusqu'au quatorzième, qui est 182, puis au lieu de prendre 204, il a pris 229, qui convient pour que toutes les cases rouges de la table d'addition de $\{1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 229\}$ soient différentes. Il a alors poursuivi sa suite en utilisant le principe de l'algorithme glouton. Cette nouvelle suite porte le nom bien sûr de « suite de Zhang » et elle est présente dans l'encyclopédie de Neil Sloane sous le numéro A259964 : 1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, 182, 229, 257, 290, 312, 381, 419, 467, 507, 621, 721, 770, 864, 927, 1050, 1178, 1289, ...

Zhenxiang Zhang a montré que la somme des inverses des termes de la suite de Mian-Chowla est inférieure à 2,1596, alors que la somme des inverses des termes de sa suite est supérieure à 2,1597. Au sens de la somme des inverses, la suite de Zhang est donc meilleure que la suite de Mian-Chowla.

La raison de ce qui apparaît comme un paradoxe est que, même si l'on utilise l'algorithme glouton pour compléter la suite de Zhang après 229, les nombres qui viennent sont un peu plus petits que ceux de la suite de Mian-Chowla et que le léger désavantage que Zhenxiang Chang a accepté en prenant 229 au lieu de 204 est compensé par ce qui vient au-delà. En un mot : Zhenxiang Zhang accepte de se laisser dépasser en prenant 229, mais il compense plus loin ce handicap et termine gagnant !

On ignore aujourd'hui quelle est, dans l'absolu, la suite optimale pour les tables d'addition qui donne une somme des inverses la plus grande possible, ni même si cela existe puisqu'il se peut que toute valeur atteinte par une suite optimale soit battue par une autre. Gregory Yovanof et Herbert Taylor ont cependant démontré en 2000 qu'on pouvait faire mieux que la suite de Zhang et dépasser 2,1600383 pour la somme des inverses. À propos des tables d'addition, on se trouve donc face à une question non résolue et probablement difficile.

Les suites de Mian-Chowla et de Zhang donnent des tables d'addition optimales : leurs cases rouges sont toutes différentes jusqu'à l'infini. Il existe cependant bien d'autres

3



L'ALGORITHME GLOUTON

Pour calculer les suites de l'encadré 2 et de nombreuses suites mentionnées dans le présent article, on utilise des algorithmes « gloutons ». L'idée est de décomposer la recherche d'un objet en une série d'étapes et de se contenter de la meilleure solution possible à chaque étape, en espérant que, quand on regroupera le résultat des étapes successives, on aura la meilleure solution possible globalement. À défaut de produire la meilleure solution recherchée, l'algorithme donne souvent une assez bonne solution. L'intérêt est que ces algorithmes gloutons sont rapides comparés aux méthodes qui rechercheraient dans tout l'espace des solutions possibles. Parfois on démontre que l'algorithme glouton donne globalement la meilleure solution.

Considérons par exemple le problème consistant à atteindre une somme donnée N avec le moins de pièces possibles quand on dispose de pièces de monnaies de 1, 2, 5, 10, 20, 50 et 100 unités. Pour atteindre la somme N , l'algorithme glouton propose d'utiliser étape par étape la plus grande pièce possible inférieure ou égale à la somme qui reste à atteindre. Pour

$N = 66$, il donnera donc la consigne de prendre 50, puis 10, puis 5, puis 1. Quand les pièces disponibles sont 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, on démontre que cette solution, obtenue rapidement, sera toujours la meilleure en nombre de pièces. L'algorithme glouton est dans ce cas parfaitement satisfaisant, heureusement ce sont les dénominations utilisées dans notre monnaie.

En revanche, si les pièces disponibles sont 1, 3, 4, 10, 30, 40 et 100, pour atteindre 66 l'algorithme glouton indiquera « prendre 40, puis 10, puis 10, puis 4, puis 1, puis 1 » alors que « prendre 30, puis 30, puis 3, puis 3 » est meilleur.

Dans cet exemple, l'algorithme glouton est imparfait. Un autre exemple est donné dans le texte avec la suite de Zhang pour trouver une suite dont les tables d'addition contiennent toujours $n(n+1)/2$ éléments différents, et dont on veut aussi que la somme des inverses soit la plus grande possible. Dans ce cas, le problème de maximiser la suite des inverses est associé à un espace de recherche infini et on ne sait pas aujourd'hui le résoudre globalement.

séquences de cette catégorie, dont toutes celles partant d'une séquence convenable finie et procédant ensuite par l'algorithme glouton pour continuer. Les suites obtenues par ce moyen semblent malheureusement toutes plus ou moins aléatoires : pour en connaître les termes, il faut procéder pas à pas et on ne sait pas à l'avance ce qu'on trouvera.

LES PUISSANCES DE 2

Cependant, la suite très simple des puissances de deux, 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^n ,... est aussi optimale pour l'addition et ses termes sont faciles à anticiper et à écrire... du moins en base 2. En effet, deux cases rouges de la table d'addition pour $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n\}$ ne peuvent pas être égales. Voici le >

TESTS NUMÉRIQUES SUR TABLES DE TAILLE CROISSANTE

4

Le théorème d'Erdős et Szemerédi de 1983 indique que pour toute suite numérique (x_n) , le nombre d'éléments différents de la table d'addition pour $\{x_1, \dots, x_n\}$ ou le nombre d'éléments différents de la table de multiplication augmente plus vite que n .

On a su démontrer depuis qu'il augmente plus vite que $n^{4/3}$ et même que $n^{4/3 + 2/1167}$. On conjecture que le $n^{4/3 + 2/1167}$ pourrait être remplacé par n^2 . Nous proposons ici quelques données numériques qui vont

$(x_n) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

Les entiers dans l'ordre

n	ADD	MUL	EXP
10	19	42	1,62
100	199	2 906	1,73
1 000	1 999	248 083	1,79
10 000	19 999	22 504 348	1,84

$(x_n) = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots\}$

Les puissances de 2

n	ADD	MUL	EXP
10	55	19	1,74
100	5 050	199	1,85
1 000	500 500	1 999	1,90
10 000	12 502 500	99 999	1,92

$(x_n) = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

Nombres premiers

n	ADD	MUL	EXP
10	33	55	1,74
100	619	5 050	1,85
1 000	8 881	500 500	1,90
5 000	53 568	12 501 250	1,92

$(x_n) = \{3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, \dots\}$

Les puissances de 3

n	ADD	MUL	EXP
10	55	19	1,74
100	5 050	199	1,85
1 000	125 250	999	1,89
10 000	500 500	1 999	1,90

$(x_n) = \{1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3, \dots\}$

Les cubes

n	ADD	MUL	EXP
10	55	42	1,74
100	5 005	2 906	1,85
1 000	498 907	248 083	1,90
5 000	12 486 560	5 770 203	1,92

$(x_n) = \{3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots\}$

Les nombres impairs à partir de 3

n	ADD	MUL	EXP
10	19	52	1,72
100	199	4 064	1,80
1 000	1 999	358 717	1,85
5 000	9 999	8 502 936	1,87

dans le sens de cette conjecture. Pour des suites (x_n) prises parmi les plus naturelles, et pour diverses valeurs de n , nous calculons le nombre d'éléments différents de la table d'addition (colonne ADD), le nombre d'éléments différents de la table de multiplication (colonne MUL), le maximum MAX de ces deux nombres (en bleu) et l'exposant correspondant EXP tel que $n^{\text{EXP}} = \text{MAX}$.

À chaque fois, il semble bien que EXP s'approche de 2, conformément à la conjecture.

$(x_n) = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots\}$

Les carrés

n	ADD	MUL	EXP
10	52	42	1,72
100	3 678	2 906	1,78
1 000	299 415	248 083	1,83
5 000	6 758 920	5 770 205	1,85

$(x_n) = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$

La suite de Fibonacci

n	ADD	MUL	EXP
10	38	45	1,65
100	4 853	4 950	1,85
1 000	498 503	499 500	1,90
2 000	1 997 003	1 999 000	1,91

$(x_n) = \{\log(1), \log(2), \dots, \log(n), \dots\}$

Les logarithmes

n	ADD	MUL	EXP
10	48	45	1,68
100	3 523	4 941	1,84
500	70 687	124 611	1,89
1 000	259 861	499 131	1,90

$(x_n) = \{2, 6, 12, \dots, n(n+1), \dots\}$

Produits de deux entiers consécutifs

n	ADD	MUL	EXP
10	49	53	1,72
100	3 441	4 961	1,84
1 000	285 600	498 838	1,90
5 000	650 3616	12 492 018	1,92

$(x_n) = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, \dots\}$

Les carrés des nombres premiers

n	ADD	MUL	EXP
10	50	55	1,74
100	3 864	5 050	1,85
1 000	398 237	500 500	1,90
5 000	10 256 872	12 502 500	1,92

$(x_n) = \{3^1 - 2, 3^2 - 3, 3^3 - 5, \dots\}$

3ⁿ moins le n-ième nombre premier

n	ADD	MUL	EXP
10	55	55	1,74
100	5 050	5 050	1,85
500	125 250	125 250	1,89
1 000	500 500	500 500	1,90

> raisonnement qui le démontre. Vous pouvez le passer si vous trouvez que c'est trop compliqué. On suppose que l'on dispose de deux cases rouges contenant le même nombre, c'est-à-dire qu'on a trouvé quatre entiers i, j, a et b tels que : $i \geq j > 0$ et $a \geq b > 0$ et $2^i + 2^j = 2^a + 2^b$. En factorisant 2^j et 2^b , on obtient : $(2^{i-j} + 1)2^j = (2^{a-b} + 1)2^b$.

- Si $i = j$, alors $2^i + 2^j = 2^{i+1}$, donc $(2^{a-b} + 1)2^b$ ne comporte que des 2 dans sa décomposition en facteurs premiers, donc $(2^{a-b} + 1)$ est pair, donc $a = b$. Il s'ensuit que $2^{i+1} = 2^{a+1}$ donc $i = j = a = b$. Les deux sommes $2^i + 2^j$ et $2^a + 2^b$ proviennent donc de la même case.

- Si $i > j$, alors $(2^{i-j} + 1)$ est impair, donc il faut que $(2^{a-b} + 1)$ soit aussi impair, donc $a > b$. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers implique que $j = b$, d'où il résulte que $i = a$. De nouveau, les deux sommes $2^i + 2^j$ et $2^a + 2^b$ proviennent de la même case.

Le même genre de raisonnements montre que la suite des puissances de 3 ($1, 3, 9, \dots, 3^n, \dots$) a aussi la propriété de donner des tables d'additions optimales, et il en va de même pour toutes les suites (k^n) si k est un entier plus grand que 2. La suite des factorielles $1!, 2!, \dots, n!$ est un exemple de nature différente de suite optimale pour l'addition.

SUITES ET TABLES OPTIMALES POUR LA MULTIPLICATION

Les considérations faites pour l'addition ont leur équivalent pour la multiplication. C'est l'objet de la question 2 énoncée en début d'article.

En appliquant le principe des algorithmes gloutons et en partant de $b_1 = 1$, on trouve à la main : $b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 5, b_5 = 7$. On pourrait penser qu'on est tombé sur la suite des nombres premiers; ce n'est pas le cas, puisque l'ordinateur nous indique que la suite optimale pour la multiplication donnée par l'algorithme glouton est : $1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 18, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 50, 53, 59, 60, 61, 67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, \dots$

Tous les nombres premiers sont présents dans cette suite optimale pour la multiplication. C'est normal, car quand un nombre premier p se présente dans l'algorithme glouton, les produits qu'il crée ont tous p dans leur décomposition en facteurs premiers, ce qui n'est le cas d'aucun produit créé avant son arrivée puisque ce sont des produits de nombres plus petits que p ; tous les produits créés sont donc nouveaux et différents, et donc p est sélectionné par l'algorithme glouton.

La suite n'est pas nouvelle et, bien sûr, on la trouve dans l'encyclopédie de Neil Sloane sous le numéro A066720. On apprend qu'elle a été probablement inventée par Jeronimo Wannhoff, mais, contrairement à la suite de Mian-Chowla, peu de travaux lui ont été