

TESTS NUMÉRIQUES SUR TABLES DE TAILLE CROISSANTE

4

Le théorème d'Erdős et Szemerédi de 1983 indique que pour toute suite numérique (x_n) , le nombre d'éléments différents de la table d'addition pour $\{x_1, \dots, x_n\}$ ou le nombre d'éléments différents de la table de multiplication augmente plus vite que n .

On a su démontrer depuis qu'il augmente plus vite que $n^{4/3}$ et même que $n^{4/3 + 2/1167}$. On conjecture que le $n^{4/3 + 2/1167}$ pourrait être remplacé par n^2 . Nous proposons ici quelques données numériques qui vont

dans le sens de cette conjecture. Pour des suites (x_n) prises parmi les plus naturelles, et pour diverses valeurs de n , nous calculons le nombre d'éléments différents de la table d'addition (colonne ADD), le nombre d'éléments différents de la table de multiplication (colonne MUL), le maximum MAX de ces deux nombres (en bleu) et l'exposant correspondant EXP tel que $n^{\text{EXP}} = \text{MAX}$.

À chaque fois, il semble bien que EXP s'approche de 2, conformément à la conjecture.

$(x_n) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

Les entiers dans l'ordre

n	ADD	MUL	EXP
10	19	42	1,62
100	199	2 906	1,73
1 000	1 999	248 083	1,79
10 000	19 999	22 504 348	1,84

$(x_n) = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n, \dots\}$

Les puissances de 2

n	ADD	MUL	EXP
10	55	19	1,74
100	5 050	199	1,85
1 000	500 500	1 999	1,90
10 000	12 502 500	99 999	1,92

$(x_n) = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

Nombres premiers

n	ADD	MUL	EXP
10	33	55	1,74
100	619	5 050	1,85
1 000	8 881	500 500	1,90
5 000	53 568	12 501 250	1,92

$(x_n) = \{3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, \dots\}$

Les puissances de 3

n	ADD	MUL	EXP
10	55	19	1,74
100	5 050	199	1,85
1 000	125 250	999	1,89
10 000	500 500	1 999	1,90

$(x_n) = \{1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3, \dots\}$

Les cubes

n	ADD	MUL	EXP
10	55	42	1,74
100	5 005	2 906	1,85
1 000	498 907	248 083	1,90
5 000	12 486 560	5 770 203	1,92

$(x_n) = \{3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots\}$

Les nombres impairs à partir de 3

n	ADD	MUL	EXP
10	19	52	1,72
100	199	4 064	1,80
1 000	1 999	358 717	1,85
5 000	9 999	8 502 936	1,87

$(x_n) = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots\}$

Les carrés

n	ADD	MUL	EXP
10	52	42	1,72
100	3 678	2 906	1,78
1 000	299 415	248 083	1,83
5 000	6 758 920	5 770 205	1,85

$(x_n) = \{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$

La suite de Fibonacci

n	ADD	MUL	EXP
10	38	45	1,65
100	4 853	4 950	1,85
1 000	498 503	499 500	1,90
2 000	1 997 003	1 999 000	1,91

$(x_n) = \{\log(1), \log(2), \dots, \log(n), \dots\}$

Les logarithmes

n	ADD	MUL	EXP
10	48	45	1,68
100	3 523	4 941	1,84
500	70 687	124 611	1,89
1 000	259 861	499 131	1,90

$(x_n) = \{2, 6, 12, \dots, n(n+1), \dots\}$

Produits de deux entiers consécutifs

n	ADD	MUL	EXP
10	49	53	1,72
100	3 441	4 961	1,84
1 000	285 600	498 838	1,90
5 000	650 3616	12 492 018	1,92

$(x_n) = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, \dots\}$

Les carrés des nombres premiers

n	ADD	MUL	EXP
10	50	55	1,74
100	3 864	5 050	1,85
1 000	398 237	500 500	1,90
5 000	10 256 872	12 502 500	1,92

$(x_n) = \{3^1 - 2, 3^2 - 3, 3^3 - 5, \dots\}$

3ⁿ moins le n-ième nombre premier

n	ADD	MUL	EXP
10	55	55	1,74
100	5 050	5 050	1,85
500	125 250	125 250	1,89
1 000	500 500	500 500	1,90

> raisonnement qui le démontre. Vous pouvez le passer si vous trouvez que c'est trop compliqué. On suppose que l'on dispose de deux cases rouges contenant le même nombre, c'est-à-dire qu'on a trouvé quatre entiers i, j, a et b tels que: $i \geq j > 0$ et $a \geq b > 0$ et $2^i + 2^j = 2^a + 2^b$. En factorisant 2^j et 2^b , on obtient: $(2^{i-j} + 1)2^j = (2^{a-b} + 1)2^b$.

- Si $i = j$, alors $2^i + 2^j = 2^{i+1}$, donc $(2^{a-b} + 1)2^b$ ne comporte que des 2 dans sa décomposition en facteurs premiers, donc $(2^{a-b} + 1)$ est pair, donc $a = b$. Il s'ensuit que $2^{i+1} = 2^{a+1}$ donc $i = j = a = b$. Les deux sommes $2^i + 2^j$ et $2^a + 2^b$ proviennent donc de la même case.

- Si $i > j$, alors $(2^{i-j} + 1)$ est impair, donc il faut que $(2^{a-b} + 1)$ soit aussi impair, donc $a > b$. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers implique que $j = b$, d'où il résulte que $i = a$. De nouveau, les deux sommes $2^i + 2^j$ et $2^a + 2^b$ proviennent de la même case.

Le même genre de raisonnements montre que la suite des puissances de 3 ($1, 3, 9, \dots, 3^n, \dots$) a aussi la propriété de donner des tables d'additions optimales, et il en va de même pour toutes les suites (k^n) si k est un entier plus grand que 2. La suite des factorielles $1!, 2!, \dots, n!$ est un exemple de nature différente de suite optimale pour l'addition.

SUITES ET TABLES OPTIMALES POUR LA MULTIPLICATION

Les considérations faites pour l'addition ont leur équivalent pour la multiplication. C'est l'objet de la question 2 énoncée en début d'article.

En appliquant le principe des algorithmes gloutons et en partant de $b_1 = 1$, on trouve à la main: $b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 5, b_5 = 7$. On pourrait penser qu'on est tombé sur la suite des nombres premiers; ce n'est pas le cas, puisque l'ordinateur nous indique que la suite optimale pour la multiplication donnée par l'algorithme glouton est: $1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 18, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 50, 53, 59, 60, 61, 67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, \dots$

Tous les nombres premiers sont présents dans cette suite optimale pour la multiplication. C'est normal, car quand un nombre premier p se présente dans l'algorithme glouton, les produits qu'il crée ont tous p dans leur décomposition en facteurs premiers, ce qui n'est le cas d'aucun produit créé avant son arrivée puisque ce sont des produits de nombres plus petits que p ; tous les produits créés sont donc nouveaux et différents, et donc p est sélectionné par l'algorithme glouton.

La suite n'est pas nouvelle et, bien sûr, on la trouve dans l'encyclopédie de Neil Sloane sous le numéro A066720. On apprend qu'elle a été probablement inventée par Jeronimo Wannhoff, mais, contrairement à la suite de Mian-Chowla, peu de travaux lui ont été