TESTS NUMÉRIQUES SUR TABLES DE TAILLE CROISSANTE

Le théorème d'Erdős et Szemerédi de 1983 indique que pour toute suite numérique (x_n), le nombre d'éléments différents de la table d'addition pour $\{x_1, ..., x_n\}$ ou le nombre d'éléments différents de la table de multiplication augmente plus vite que n.

On a su démontrer depuis qu'il augmente plus vite que $n^{4/3}$ et même que $n^{4/3+2/1\,167}$. On conjecture que le $n^{4/3+2/1\,167}$ pourrait être remplacé par n^2. Nous proposons ici quelques données numériques qui vont dans le sens de cette conjecture. Pour des suites (x_n) prises parmi les plus naturelles, et pour diverses valeurs de n, nous calculons le nombre d'éléments différents de la table d'addition (colonne ADD), le nombre d'éléments différents de la table de multiplication (colonne MUL), le maximum MAX de ces deux nombres *(en bleu)* et l'exposant correspondant EXP tel que $n^{EXP} = MAX$. À chaque fois, il semble bien que EXP s'approche de 2, conformément à la conjecture.

$(x_n) = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$
Les entiers dans l'ordre

n	ADD	MUL	EXP
10	19	42	1,62
100	199	2 906	1,73
1 000	1 999	248 083	1,79
10 000	19 999	22 504 348	1,84

$(x_n) = \{1^2, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...\}$
Les carrés

n	ADD	MUL	EXP
10	52	42	1,72
100	3 678	2 906	1,78
1 000	299 415	248 083	1,83
5 000	6 758 920	5 770 205	1,85

$(x_n) = \{2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ...\}$
Les puissances de 2

n	ADD	MUL	EXP
10	55	19	1,74
100	5 050	199	1,85
1 000	500 500	1 999	1,90
10 000	12 502 500	99 999	1,92

$(x_n) = \{1, 1, 2, 3, 5, ...\}$
La suite de Fibonacci

n	ADD	MUL	EXP
10	38	45	1,65
100	4 853	4 950	1,85
1 000	498 503	499 500	1,90
2 000	1 997 003	1 999 000	1,91

$(x_n) = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$
Nombres premiers

n	ADD	MUL	EXP
10	33	55	1,74
100	619	5 050	1,85
1 000	8 881	500 500	1,90
5 000	53 568	12 501 250	1,92

$(x_n) = \{\log(1), \log(2), ..., \log(n), ...\}$
Les logarithmes

n	ADD	MUL	EXP
10	48	45	1,68
100	3 523	4 941	1,84
500	70 687	124 611	1,89
1 000	259 861	499 131	1,90

$(x_n) = \{3, 3^2, 3^3, ..., 3^n, ...\}$
Les puissances de 3

n	ADD	MUL	EXP
10	55	19	1,74
100	5 050	199	1,85
1 000	125 250	999	1,89
10 000	500 500	1 999	1,90

$(x_n) = \{2, 6, 12, ..., n(n+1), ...\}$
Produits de deux entiers consécutifs

n	ADD	MUL	EXP
10	49	53	1,72
100	3 441	4 961	1,84
1 000	285 600	498 838	1,90
5 000	6 503 616	12 492 018	1,92

$(x_n) = \{1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3, ...\}$
Les cubes

n	ADD	MUL	EXP
10	55	42	1,74
100	5 005	2 906	1,85
1 000	498 907	248 083	1,90
5 000	12 486 560	5 770 203	1,92

$(x_n) = \{2^2, 3^2, 5^2, 7^2, ...\}$
Les carrés des nombres premiers

n	ADD	MUL	EXP
10	50	55	1,74
100	3 864	5 050	1,85
1 000	398 237	500 500	1,90
5 000	10 256 872	12 502 500	1,92

$(x_n) = \{3, 5, 7, ..., 2n+1, ...\}$
Les nombres impairs à partir de 3

n	ADD	MUL	EXP
10	19	52	1,72
100	199	4 064	1,80
1 000	1 999	358 717	1,85
5 000	9 999	8 502 936	1,87

$(x_n) = \{3^1 - 2, 3^2 - 3, 3^3 - 5, ...\}$
3^n moins le n-ième nombre premier

n	ADD	MUL	EXP
10	55	55	1,74
100	5 050	5 050	1,85
500	125 250	125 250	1,89
1 000	500 500	500 500	1,90

> raisonnement qui le démontre. Vous pouvez le passer si vous trouvez que c'est trop compliqué. On suppose que l'on dispose de deux cases rouges contenant le même nombre, c'est-à-dire qu'on a trouvé quatre entiers i, j, a et b tels que : $i \geq j > 0$ et $a \geq b > 0$ et $2^i + 2^j = 2^a + 2^b$. En factorisant 2^j et 2^b, on obtient : $(2^{i-j}+1)2^j = (2^{a-b}+1)2^b$.

- Si $i = j$, alors $2^i+2^j = 2^{i+1}$, donc $(2^{a-b}+1)2^b$ ne comporte que des 2 dans sa décomposition en facteurs premiers, donc $(2^{a-b}+1)$ est pair, donc $a = b$. Il s'ensuit que $2^{i+1}=2^{a+1}$ donc $i = j = a = b$. Les deux sommes 2^i+2^j et 2^a+2^b proviennent donc de la même case.
- Si $i > j$, alors $(2^{i-j}+1)$ est impair, donc il faut que $(2^{a-b}+1)$ soit aussi impair, donc $a > b$. L'unicité de la décomposition en facteurs premiers implique que $j=b$, d'où il résulte que $i=a$. De nouveau, les deux sommes 2^i+2^j et 2^a+2^b proviennent de la même case.

Le même genre de raisonnements montre que la suite des puissances de 3 $(1, 3, 9, ... 3^n, ...)$ a aussi la propriété de donner des tables d'additions optimales, et il en va de même pour toutes les suites (k^n) si k est un entier plus grand que 2. La suite des factorielles $1!, 2!, ..., n!$ est un exemple de nature différente de suite optimale pour l'addition.

SUITES ET TABLES OPTIMALES POUR LA MULTIPLICATION

Les considérations faites pour l'addition ont leur équivalent pour la multiplication. C'est l'objet de la question 2 énoncée en début d'article.

En appliquant le principe des algorithmes gloutons et en partant de $b_1=1$, on trouve à la main : $b_2=2$, $b_3=3$, $b_4=5$, $b_5=7$. On pourrait penser qu'on est tombé sur la suite des nombres premiers ; ce n'est pas le cas, puisque l'ordinateur nous indique que la suite optimale pour la multiplication donnée par l'algorithme glouton est : 1, 2, 3, 5, 7, 8, 11, 13, 17, 18, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 50, 53, 59, 60, 61, 67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, ...

Tous les nombres premiers sont présents dans cette suite optimale pour la multiplication. C'est normal, car quand un nombre premier p se présente dans l'algorithme glouton, les produits qu'il crée ont tous p dans leur décomposition en facteurs premiers, ce qui n'est le cas d'aucun produit créé avant son arrivée puisque ce sont des produits de nombres plus petits que p ; tous les produits créés sont donc nouveaux et différents, et donc p est sélectionné par l'algorithme glouton.

La suite n'est pas nouvelle et, bien sûr, on la trouve dans l'encyclopédie de Neil Sloane sous le numéro A066720. On apprend qu'elle a été probablement inventée par Jeronimo Wannhoff, mais, contrairement à la suite de Mian-Chowla, peu de travaux lui ont été

consacrés. Comme pour les suites optimales pour l'addition, la suite optimale pour la multiplication donnée par l'algorithme glouton n'est pas la seule, et semble plus ou moins aléatoire. En revanche, le raisonnement indiqué plus haut montre qu'il en existe une autre facile à décrire en peu de mots : la suite des nombres premiers.

Plus généralement, si chaque nouveau terme introduit dans une suite comporte un facteur premier non utilisé avant son introduction, on obtiendra une suite optimale pour la multiplication. La suite des carrés des nombres premiers convient donc aussi, ou la suite des nombres premiers en n'en gardant qu'un sur deux.

L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION EN MÊME TEMPS

Venons-en à la question 3. Nous avons vu que pour {1, 2, 5, 7}, les tables d'addition et de multiplication sont toutes les deux optimales : elles comportent chacune $n(n+1)/2$ éléments différents. Si, comme précédemment, on applique la méthode de l'algorithme glouton pour poursuivre au-delà de 7, on tombe sur la suite (c_n) : 1, 2, 5, 7, 15, 22, 31, 50, 68, 90, 101, 124, 163, 188, 215, 253, 322, 358, 455, 486, 527, 631, 702, 780, 838, 920, 1030, 1062, 1197, ...

L'encadré 2 donne l'exemple des tables d'addition et de multiplication qui, pour les huit premiers termes de la suite, contiennent chacune le maximum possible de nombres différents. Ayant fait calculer la suite assez loin, je l'ai cherchée dans l'encyclopédie de Neil Sloane ; elle n'y était pas ! Je l'ai signalé à Neil Sloane, qui l'a aussitôt ajoutée. C'est maintenant la suite A337655.

Neil Sloane assemble minutieusement son encyclopédie depuis 1960 et doit régulièrement ajouter de nouvelles suites ayant des définitions simples et naturelles. Il indique qu'il est toujours étonné que l'on construise de nouvelles suites « qu'Euclide lui-même aurait aimées ». Il a remarqué que quand on regarde les nombres présents dans les tables d'addition successives associées à la suite A337655, certains entiers manquent indéfiniment. On a donc calculé la suite des nombres absents de ces tables d'addition. Surprise ! Cette suite est encore nouvelle. Il l'a donc ajoutée à l'encyclopédie, c'est la suite A337658 : 1, 5, 11, 13, 15, 18, 19, 21, 25, 26, 28, 31, 34, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 49, 50, 54, 56, 58, 59, 60, 61, ...

Une autre façon de considérer simultanément l'addition et la multiplication consiste à exiger que les tables d'addition et de multiplication comportent chacune $n(n+1)/2$ éléments différents (c'est l'idée de A337655) en imposant en plus qu'elles n'aient aucun nombre en commun. Le lendemain de l'ajout par Neil Sloane de ma séquence A337655, Peter Cagey, qui devait être informé des évolutions de l'encyclopédie, a proposé cette seconde façon de prendre en compte addition et multiplication. Cela a donné une nouvelle entrée dans l'encyclopédie, la suite A337946 : 1, 3, 7, 12, 22, 30, 47, 61, 85, 113, 126, 177, 193, 246, 279, 321, 341, 428, 499, 571, 616, 686, 754, 854, 975, 1052, 1150, 1317, 1376, 1457, ...

IMPOSSIBLES PETITES TABLES

Venons-en à la quatrième question. La réponse est cette fois négative : non, il n'est pas possible que la table d'addition et de multiplication aient simultanément peu de nombres différents. C'est le résultat de Paul Erdős et Endre Szemerédi de 1983 dont voici l'énoncé précis :

« Il existe deux constantes $C>0$ et $e>0$ telles que, pour tout ensemble E de nombres réels de taille n, le nombre d'éléments différents de la table d'addition de E ou le nombre d'éléments différents de la table de multiplication de E dépasse Cn^{1+e}. » Autrement dit, il est impossible que les tables d'addition et de multiplication soient toutes deux très répétitives.

Le résultat n'est pas réellement étonnant, mais il est difficile à démontrer. Erdős et Szemerédi pensaient qu'on pouvait beaucoup l'améliorer et remplacer le e de leur résultat, dont seule l'existence était affirmée, par n'importe quel nombre $e<1$, ce qui signifierait que pour tout ensemble fini de n nombres, l'une des deux tables, d'addition ou de multiplication, aurait un nombre d'éléments différents proche du maximum possible, $n(n+1)/2$.

Pour progresser vers la démonstration de cette conjecture, il fallait d'abord réussir à préciser au moins un $e>0$ comme dans le théorème de 1983. Cela a été fait en 2008 par Kevin Ford, qui a montré que e pouvait être pris aussi proche que l'on veut de 1/15. En 2009, Jozsef Solymozi a remplacé le 1/15 par 1/3. Le résultat a encore été amélioré en 2016 par Misha Rudnev, Ilya Shkredov et Sophie Stevens, qui ont remplacé 1/3 par 1/3+1/1509. En 2018, George Shakan a progressé encore et prouvé le résultat avec 1/3+5/5277. Le dernier progrès a été publié en 2020 : Misha Rudnev et Sophie Stevens ont montré que 1/3+2/1167 convient.

Remarquons que :
1/15=0,06666...
1/3=0,3333...
1/3+1/1509=0,33399602...
1/3+5/5277=0,33428084...
1/3+2/1167= 0,33504712...

Les avancées de $1+e$ vers 2 ne sont pas très rapides et cela malgré l'intense travail de recherche mené. L'addition et la multiplication ne sont pas sur le point de livrer tous leurs secrets... ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Rudnev et S. Stevens, **An update on the sum-product problem**, prépublication arXiv:2005.11145, 2020 (https://arxiv.org/pdf/2005.11145.pdf).

G. Shakan, **On higher energy decompositions and the sum-product phenomenon**, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 167(3), pp. 599-617, 2019.

T. Tao, **The sum-product phenomenon in arbitrary rings**, *Contributions to Discrete Mathematics*, vol.4(2), pp. 59-82, 2009.

G. S. Yovanof et H. Taylor, **B2-sequences and the distinct distance constant**, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 39(11), pp. 37-42, 2000.

Z. Zhang, **A B_2-sequence with larger reciprocal sum**, *Mathematics of Computation*, vol. 60, pp. 835-839, 1993.

P. Erdős et E. Szemerédi, **On sums and products of integers**, *Studies in Pure Mathematics*, pp. 213-218, 1983.

A. M. Mian et S. Chowla, **On the B_2-Sequences of Sidon**, *Proc. Nat. Acad. Sci. India A*, vol. 14, pp. 3-4, 1944.