

consacrés. Comme pour les suites optimales pour l'addition, la suite optimale pour la multiplication donnée par l'algorithme glouton n'est pas la seule, et semble plus ou moins aléatoire. En revanche, le raisonnement indiqué plus haut montre qu'il en existe une autre facile à décrire en peu de mots: la suite des nombres premiers.

Plus généralement, si chaque nouveau terme introduit dans une suite comporte un facteur premier non utilisé avant son introduction, on obtiendra une suite optimale pour la multiplication. La suite des carrés des nombres premiers convient donc aussi, ou la suite des nombres premiers en n'en gardant qu'un sur deux.

L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION EN MÊME TEMPS

Venons-en à la question 3. Nous avons vu que pour $\{1, 2, 5, 7\}$, les tables d'addition et de multiplication sont toutes les deux optimales: elles comportent chacune $n(n+1)/2$ éléments différents. Si, comme précédemment, on applique la méthode de l'algorithme glouton pour poursuivre au-delà de 7, on tombe sur la suite (c_n) : 1, 2, 5, 7, 15, 22, 31, 50, 68, 90, 101, 124, 163, 188, 215, 253, 322, 358, 455, 486, 527, 631, 702, 780, 838, 920, 1030, 1062, 1197, ...

L'encadré 2 donne l'exemple des tables d'addition et de multiplication qui, pour les huit premiers termes de la suite, contiennent chacune le maximum possible de nombres différents. Ayant fait calculer la suite assez loin, je l'ai cherchée dans l'encyclopédie de Neil Sloane; elle n'y était pas! Je l'ai signalé à Neil Sloane, qui l'a aussitôt ajoutée. C'est maintenant la suite A337655.

Neil Sloane assemble minutieusement son encyclopédie depuis 1960 et doit régulièrement ajouter de nouvelles suites ayant des définitions simples et naturelles. Il indique qu'il est toujours étonné que l'on construise de nouvelles suites «qu'Euclide lui-même aurait aimées». Il a remarqué que quand on regarde les nombres présents dans les tables d'addition successives associées à la suite A337655, certains entiers manquent indéfiniment. On a donc calculé la suite des nombres absents de ces tables d'addition. Surprise! Cette suite est encore nouvelle. Il l'a donc ajoutée à l'encyclopédie, c'est la suite A337658: 1, 5, 11, 13, 15, 18, 19, 21, 25, 26, 28, 31, 34, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 49, 50, 54, 56, 58, 59, 60, 61, ...

Une autre façon de considérer simultanément l'addition et la multiplication consiste à exiger que les tables d'addition et de multiplication comportent chacune $n(n+1)/2$ éléments différents (c'est l'idée de A337655) en imposant en plus qu'elles n'aient aucun nombre en commun. Le lendemain de l'ajout par Neil

Sloane de ma séquence A337655, Peter Cagey, qui devait être informé des évolutions de l'encyclopédie, a proposé cette seconde façon de prendre en compte addition et multiplication. Cela a donné une nouvelle entrée dans l'encyclopédie, la suite A337946: 1, 3, 7, 12, 22, 30, 47, 61, 85, 113, 126, 177, 193, 246, 279, 321, 341, 428, 499, 571, 616, 686, 754, 854, 975, 1052, 1150, 1317, 1376, 1457, ...

IMPOSSIBLES PETITES TABLES

Venons-en à la quatrième question. La réponse est cette fois négative: non, il n'est pas possible que la table d'addition et de multiplication aient simultanément peu de nombres différents. C'est le résultat de Paul Erdős et Endre Szemerédi de 1983 dont voici l'énoncé précis:

«Il existe deux constantes $C > 0$ et $\epsilon > 0$ telles que, pour tout ensemble E de nombres réels de taille n , le nombre d'éléments différents de la table d'addition de E ou le nombre d'éléments différents de la table de multiplication de E dépasse $Cn^{1+\epsilon}$.» Autrement dit, il est impossible que les tables d'addition et de multiplication soient toutes deux très répétitives.

Le résultat n'est pas réellement étonnant, mais il est difficile à démontrer. Erdős et Szemerédi pensaient qu'on pouvait beaucoup l'améliorer et remplacer le ϵ de leur résultat, dont seule l'existence était affirmée, par n'importe quel nombre $\epsilon < 1$, ce qui signifierait que pour tout ensemble fini de n nombres, l'une des deux tables, d'addition ou de multiplication, aurait un nombre d'éléments différents proche du maximum possible, $n(n+1)/2$.

Pour progresser vers la démonstration de cette conjecture, il fallait d'abord réussir à préciser au moins un $\epsilon > 0$ comme dans le théorème de 1983. Cela a été fait en 2008 par Kevin Ford, qui a montré que ϵ pouvait être pris aussi proche que l'on veut de $1/15$. En 2009, Jozsef Solymosi a remplacé le $1/15$ par $1/3$. Le résultat a encore été amélioré en 2016 par Misha Rudnev, Ilya Shkredov et Sophie Stevens, qui ont remplacé $1/3$ par $1/3 + 1/1509$. En 2018, George Shakan a progressé encore et prouvé le résultat avec $1/3 + 5/5277$. Le dernier progrès a été publié en 2020: Misha Rudnev et Sophie Stevens ont montré que $1/3 + 2/1167$ convient.

Remarquons que:

$$\begin{aligned} 1/15 &= 0,06666... \\ 1/3 &= 0,3333... \\ 1/3 + 1/1509 &= 0,33399602... \\ 1/3 + 5/5277 &= 0,33428084... \\ 1/3 + 2/1167 &= 0,33504712... \end{aligned}$$

Les avancées de $1+\epsilon$ vers 2 ne sont pas très rapides et cela malgré l'intense travail de recherche mené. L'addition et la multiplication ne sont pas sur le point de livrer tous leurs secrets... ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Rudnev et S. Stevens, **An update on the sum-product problem**, prépublication arXiv:2005.11145, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/2005.11145.pdf>).

G. Shakan, **On higher energy decompositions and the sum-product phenomenon**, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 167(3), pp. 599-617, 2019.

T. Tao, **The sum-product phenomenon in arbitrary rings**, *Contributions to Discrete Mathematics*, vol.4(2), pp. 59-82, 2009.

G. S. Yovanof et H. Taylor, **B₂-sequences and the distinct distance constant**, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 39(11), pp. 37-42, 2000.

Z. Zhang, **A B₂-sequence with larger reciprocal sum**, *Mathematics of Computation*, vol. 60, pp. 835-839, 1993.

P. Erdős et E. Szemerédi, **On sums and products of integers**, *Studies in Pure Mathematics*, pp. 213-218, 1983.

A. M. Mian et S. Chowla, **On the B₂-Sequences of Sidon**, *Proc. Nat. Acad. Sci. India A*, vol. 14, pp. 3-4, 1944.