

consacrés. Comme pour les suites optimales pour l'addition, la suite optimale pour la multiplication donnée par l'algorithme glouton n'est pas la seule, et semble plus ou moins aléatoire. En revanche, le raisonnement indiqué plus haut montre qu'il en existe une autre facile à décrire en peu de mots: la suite des nombres premiers.

Plus généralement, si chaque nouveau terme introduit dans une suite comporte un facteur premier non utilisé avant son introduction, on obtiendra une suite optimale pour la multiplication. La suite des carrés des nombres premiers convient donc aussi, ou la suite des nombres premiers en n'en gardant qu'un sur deux.

L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION EN MÊME TEMPS

Venons-en à la question 3. Nous avons vu que pour $\{1, 2, 5, 7\}$, les tables d'addition et de multiplication sont toutes les deux optimales: elles comportent chacune $n(n+1)/2$ éléments différents. Si, comme précédemment, on applique la méthode de l'algorithme glouton pour poursuivre au-delà de 7, on tombe sur la suite (c_n) : 1, 2, 5, 7, 15, 22, 31, 50, 68, 90, 101, 124, 163, 188, 215, 253, 322, 358, 455, 486, 527, 631, 702, 780, 838, 920, 1030, 1062, 1197, ...

L'encadré 2 donne l'exemple des tables d'addition et de multiplication qui, pour les huit premiers termes de la suite, contiennent chacune le maximum possible de nombres différents. Ayant fait calculer la suite assez loin, je l'ai cherchée dans l'encyclopédie de Neil Sloane; elle n'y était pas! Je l'ai signalé à Neil Sloane, qui l'a aussitôt ajoutée. C'est maintenant la suite A337655.

Neil Sloane assemble minutieusement son encyclopédie depuis 1960 et doit régulièrement ajouter de nouvelles suites ayant des définitions simples et naturelles. Il indique qu'il est toujours étonné que l'on construise de nouvelles suites «qu'Euclide lui-même aurait aimées». Il a remarqué que quand on regarde les nombres présents dans les tables d'addition successives associées à la suite A337655, certains entiers manquent indéfiniment. On a donc calculé la suite des nombres absents de ces tables d'addition. Surprise! Cette suite est encore nouvelle. Il l'a donc ajoutée à l'encyclopédie, c'est la suite A337658: 1, 5, 11, 13, 15, 18, 19, 21, 25, 26, 28, 31, 34, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 47, 48, 49, 50, 54, 56, 58, 59, 60, 61, ...

Une autre façon de considérer simultanément l'addition et la multiplication consiste à exiger que les tables d'addition et de multiplication comportent chacune $n(n+1)/2$ éléments différents (c'est l'idée de A337655) en imposant en plus qu'elles n'aient aucun nombre en commun. Le lendemain de l'ajout par Neil

Sloane de ma séquence A337655, Peter Cagey, qui devait être informé des évolutions de l'encyclopédie, a proposé cette seconde façon de prendre en compte addition et multiplication. Cela a donné une nouvelle entrée dans l'encyclopédie, la suite A337946: 1, 3, 7, 12, 22, 30, 47, 61, 85, 113, 126, 177, 193, 246, 279, 321, 341, 428, 499, 571, 616, 686, 754, 854, 975, 1052, 1150, 1317, 1376, 1457, ...

IMPOSSIBLES PETITES TABLES

Venons-en à la quatrième question. La réponse est cette fois négative: non, il n'est pas possible que la table d'addition et de multiplication aient simultanément peu de nombres différents. C'est le résultat de Paul Erdős et Endre Szemerédi de 1983 dont voici l'énoncé précis:

«Il existe deux constantes $C > 0$ et $e > 0$ telles que, pour tout ensemble E de nombres réels de taille n , le nombre d'éléments différents de la table d'addition de E ou le nombre d'éléments différents de la table de multiplication de E dépasse Cn^{1+e} .» Autrement dit, il est impossible que les tables d'addition et de multiplication soient toutes deux très répétitives.

Le résultat n'est pas réellement étonnant, mais il est difficile à démontrer. Erdős et Szemerédi pensaient qu'on pouvait beaucoup l'améliorer et remplacer le e de leur résultat, dont seule l'existence était affirmée, par n'importe quel nombre $e < 1$, ce qui signifierait que pour tout ensemble fini de n nombres, l'une des deux tables, d'addition ou de multiplication, aurait un nombre d'éléments différents proche du maximum possible, $n(n+1)/2$.

Pour progresser vers la démonstration de cette conjecture, il fallait d'abord réussir à préciser au moins un $e > 0$ comme dans le théorème de 1983. Cela a été fait en 2008 par Kevin Ford, qui a montré que e pouvait être pris aussi proche que l'on veut de $1/15$. En 2009, Jozsef Solymosi a remplacé le $1/15$ par $1/3$. Le résultat a encore été amélioré en 2016 par Misha Rudnev, Ilya Shkredov et Sophie Stevens, qui ont remplacé $1/3$ par $1/3 + 1/1509$. En 2018, George Shakan a progressé encore et prouvé le résultat avec $1/3 + 5/5277$. Le dernier progrès a été publié en 2020: Misha Rudnev et Sophie Stevens ont montré que $1/3 + 2/1167$ convient.

Remarquons que:

$1/15 = 0,06666...$
 $1/3 = 0,3333...$
 $1/3 + 1/1509 = 0,33399602...$
 $1/3 + 5/5277 = 0,33428084...$
 $1/3 + 2/1167 = 0,33504712...$

Les avancées de $1+e$ vers 2 ne sont pas très rapides et cela malgré l'intense travail de recherche mené. L'addition et la multiplication ne sont pas sur le point de livrer tous leurs secrets... ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Rudnev et S. Stevens, **An update on the sum-product problem**, prépublication arXiv:2005.11145, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/2005.11145.pdf>).

G. Shakan, **On higher energy decompositions and the sum-product phenomenon**, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 167(3), pp. 599-617, 2019.

T. Tao, **The sum-product phenomenon in arbitrary rings**, *Contributions to Discrete Mathematics*, vol.4(2), pp. 59-82, 2009.

G. S. Yovanof et H. Taylor, **B2-sequences and the distinct distance constant**, *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 39(11), pp. 37-42, 2000.

Z. Zhang, **A B₂-sequence with larger reciprocal sum**, *Mathematics of Computation*, vol. 60, pp. 835-839, 1993.

P. Erdős et E. Szemerédi, **On sums and products of integers**, *Studies in Pure Mathematics*, pp. 213-218, 1983.

A. M. Mian et S. Chowla, **On the B₂-Sequences of Sidon**, *Proc. Nat. Acad. Sci. India A*, vol. 14, pp. 3-4, 1944.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

GIOTTO

L'ARTISTE GÉOLOGUE

Dans les œuvres que le peintre italien Giotto a consacrées à la vie de saint François d'Assise se cache un véritable manuel de la géologie tourmentée des Apennins.

En traversant vers l'est l'Ombrie, en Italie, sur la route SR147, la plaine laisse soudain la place à un imposant et majestueux bâtiment long de 80 mètres dressé sur un promontoire. Bienvenue à la basilique Saint-François, à Assise. Dans l'édifice, construit sur le flanc du mont Subasio à partir de 1228, à peine deux ans après la mort de François, deux espaces se superposent, l'«église inférieure» achevée

en 1230 et l'«église supérieure» terminée en 1253. La nef de cette dernière sera décorée à la fin du XIII^e siècle par Giotto (1266-1337) dont les fresques retracent la vie de saint François. Précurseur de la Renaissance, le peintre s'affranchit, ici et dans d'autres œuvres, du style byzantin qui prévalait en introduisant d'une part de la profondeur, de la perspective, et d'autre part des éléments naturels comme des arbres, des montagnes... Jusqu'où le réalisme a-t-il été poussé? C'est ce qu'a voulu savoir la géologue Ann Pizzorusso.

Le problème est ardu tant la région est complexe d'un point de vue géologique. En effet, la chaîne des Apennins qui parcourt l'Italie du nord au sud en passant par Assise résulte de processus encore non complètement élucidés. Ainsi, les montagnes se sont dressées il y

a environ 20 millions d'années sous l'effet de forces contradictoires, toujours à l'œuvre aujourd'hui. À l'est, une subduction au niveau de la mer Adriatique a comprimé la croûte terrestre et y a imprimé des plis, les sommets orientaux des Apennins. À l'ouest, les mouvements du manteau terrestre ont entraîné une extension de l'écorce, la fragmentant en blocs dont certains se sont élevés. Comment Giotto s'est-il accommodé de cette géologie mouvementée?

D'abord, ces différents soulèvements concernent des roches sédimentaires, des calcaires constitués des restes de microorganismes marins dont les couleurs varient du blanc au gris en passant par l'ivoire. Ce sont bien les couleurs que l'on retrouve dans les peintures de Giotto, mais il n'y a rien d'étonnant tant ces couleurs sont



Saint François offrant son manteau à un pauvre.

communes. En revanche, certaines constructions semblent roses... Or un calcaire célèbre de la région (le «Scaglia rosso») et dont est fait le mont Subasio est bien de cette teinte. On la doit à l'oxydation du fer contenu dans la roche.

UN CALCAIRE ROSE

Cette roche s'est formée, du Crétacé jusqu'au milieu de l'Éocène (de 137 à 23 millions d'années), de l'amoncellement de foraminifères et de coccolites. Le processus ininterrompu pendant plus de 100 millions d'années offre un enregistrement unique où sont consignées les inversions du champ magnétique terrestre ainsi que la chute de la météorite qui a précipité la disparition des dinosaures. C'est avec ce calcaire rose qu'a été construite la basilique Saint-François d'Assise. Serait-ce donc cette ville que l'on voit sur *Saint François offrant son manteau à un pauvre* (voir ci-dessus à gauche)? Des historiens d'art le pensent, mais pas Ann Pizzorusso, car le reste du paysage n'est pas conforme. De fait, dans l'œuvre, la vallée qui s'étend au pied du mont Subasio est remplacée par une colline. Selon la géologue, Giotto n'a

pas cherché à reproduire précisément la réalité, mais plutôt à proposer des paysages génériques, typiques de la région.

Dans *Saint François recevant les stigmates* (ci-dessus, à droite, en bas), à l'église Santa Croce de Florence, le saint est représenté devant un bloc de calcaire qui a été soulevé, comme en atteste sa forme presque verticale. Les angles arrondis trahissent une érosion. On distingue aussi des fissures, près de l'église, et une grotte qui résultent probablement d'infiltrations pour les premières et de mouvements tectoniques pour la seconde. Selon la légende, François aurait reçu ses stigmates sur le mont Penna, un bloc gigantesque de calcaire, isolé, à 100 kilomètres au sud-est d'Assise, projeté là au moment de la création des Apennins. Dans sa fresque, Giotto aurait bien représenté ce sommet qui présente les mêmes caractéristiques.

Dernier détour géologique dans l'œuvre de Giotto, *Le Miracle de la source* (ci-dessus, à droite, en haut) montre saint François faisant jaillir de l'eau d'une montagne, en l'occurrence un calcaire stratifié et érodé, tout à fait réaliste, ressemblant à celui dit «maïolica», courant dans la



Le Miracle de la source.



Saint François reçoit les stigmates.

région. À l'arrière-plan, on aperçoit là encore des blocs qui ont été redressés. Et dans ce type de contexte tourmenté par des mouvements importants, il est bien fréquent que de l'eau surgisse... sans besoin de miracle.

Comment expliquer le parti pris de Giotto d'incorporer des éléments naturels dans ses compositions? Peut-être par le désir d'ancrer la légende de saint François dans des décors reconnus par les fidèles, et ainsi de l'inscrire dans la réalité. Toujours est-il que ce choix esthétique s'accorde bien avec le message de saint François qui encourageait à voir dans la nature l'image de Dieu, et méritant donc à ce titre respect et protection. Le premier message écologiste! ■

A. Pizzorusso, A portrait of central Italy's geology through Giotto's paintings and its possible cultural implications, *Geosci. Commun.*, vol. 3, pp.427-442, 2020.