

R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

DE L'HYPERCUBE À LA SENSITIVITÉ

La «conjecture de la sensibilité», qui portait sur la complexité des fonctions booléennes, importantes en informatique, résistait depuis plusieurs décennies. Un jeune mathématicien d'origine chinoise, Hao Huang, l'a prouvée en deux pages, en exploitant un détour par les hypercubes.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

La logique booléenne est celle que vous pratiquez quand vous lisez une carte de restaurant: (Œuf mayonnaise ou Carottes ou Jambon) et ((Canard et Pommes de terre) ou (Saumon et riz)) et (Tarte ou Glace). Même sans les parenthèses, vous comprenez! Son nom évoque George Boole (1815-1864), qui proposa de calculer avec les propositions et les connecteurs logiques (NON, ET, OU, IMPLIQUE, etc.) comme on calcule avec les nombres.

Les travaux de l'ingénieur et mathématicien américain Claude Shannon (1916-2001) ont rendu essentiel ce calcul pour la conception des puces électroniques et aujourd'hui pour la cryptographie. Comme toujours en mathématiques, on y rencontre des énoncés que l'on soupçonne vrais sans réussir à les démontrer. C'était le cas de la «conjecture de la sensibilité» devenu en 2019 «théorème de la sensibilité» puisqu'elle a été démontrée. Le plus étonnant est que, après avoir résisté près de trente ans aux meilleurs spécialistes, un jeune mathématicien aux États-Unis, Hao Huang, en est venu à bout dans un article de six pages, l'argument principal de la démonstration occupant moins de deux pages.

LE GRAPHE DE L'HYPERCUBE

Pour analyser ce résultat, examinons d'abord la structure remarquable de l'hypercube de dimension n , ce qui est déjà un défi pour l'imagination que quelques dessins nous aideront à relever.

L'hypercube de dimension n , noté H_n , est un graphe qui généralise le carré et le cube

(voir l'encadré page ci-contre). En dimension 2, le carré, H_2 , possède 4 sommets et 4 arêtes. Sur le plan, on représentera les sommets du carré par les points de coordonnées A (0, 0), B (0, 1), C (1, 0) et D (1, 1). Chaque sommet de ce graphe est relié par deux arêtes à deux voisins; par exemple, le sommet A est relié à B et à C.

En dimension 3, le cube, H_3 , a 8 sommets et 12 arêtes. Les sommets sont par exemple les points ayant pour coordonnées les 8 triplets de nombres pris parmi 0 et 1: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 et 111. Chaque sommet S est relié par trois arêtes à trois voisins. Les voisins de S sont les sommets S' dont les coordonnées ne diffèrent de celles de S que par une coordonnée. Par exemple, les trois voisins de 010 sont 110, 000 et 011. Les 12 arêtes du cube constituent un graphe où, pour se déplacer en n'empruntant que les arêtes, on doit passer d'un sommet à l'autre en ne changeant qu'une coordonnée à la fois. On peut parcourir tous les sommets du cube sans passer deux fois par le même sommet; cela définit un «chemin hamiltonien», dont un exemple est le parcours:

000 - 001 - 011 - 010 - 110 - 111 - 101 - 100.

Vous l'avez deviné, l'hypercube de dimension 4, H_4 , est défini par ses 16 sommets qui sont tous les quadruplets possibles de 0 et de 1: 0000, 0001, 0010, ..., 1111. On obtient son graphe en prenant deux copies du graphe du cube de dimension 3 et en ajoutant des 0 devant les coordonnées des sommets du premier et des 1 devant les coordonnées des sommets du second. On ajoute pour finir des arêtes pour joindre les sommets analogues des deux cubes de dimension 3: >

D'UN HYPERCUBE À L'AUTRE

Pour dessiner l'hypercube H_n de dimension n , à partir de l'hypercube H_{n-1} de dimension $n-1$, on translate H_{n-1} pour obtenir une copie H_{n-1}' , puis on joint (en bleu) les sommets analogues.

H_n a 2^n sommets qui sont les points dont toutes les coordonnées sont des 0 ou des 1. Il a $n \cdot 2^{n-1}$ arêtes, qui sont tous les segments de droite liant deux sommets ayant exactement $n-1$ coordonnées identiques. Par exemple, les sommets $(1, 0, 0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0, 1, 1)$ sont liés par une arête dans le cas de l'hypercube de dimension 5.

Les coordonnées des sommets de H_n sont obtenues en ajoutant un 0 devant chacune des coordonnées des sommets de H_{n-1} et en ajoutant un 1 devant chacune des coordonnées des sommets de H_{n-1}' . Ainsi, les sommets $(0, 0, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 1, 0, 0)$ de H_5 proviennent du sommet $(0, 1, 0, 0)$ de H_4 .

La Grande Arche de la Défense, à Paris, est une représentation en trois dimensions d'un hypercube de dimension 4 parfois dénommé « tesseract » ou « octachore ».

On peut déplier les faces d'un cube pour les aplatir, ce qui donne six carrés collés en forme

de croix (l'une des branches étant plus longue). C'est ce que l'on désigne par un « patron ». De même, on peut déplier les « faces » de l'hypercube de dimension 4 qui sont des cubes de dimension 3 ; cela donne une sorte de croix composée de huit cubes (voir le schéma). Cette croix a servi de base au tableau *La Crucifixion (Corpus hypercubus)*, de Salvador Dali, peint en 1954 ; la géométrie lui avait été enseignée par le peintre mathématicien Marcel Duchamp. Sur le carrelage représenté, on distingue le patron du cube à trois dimensions.

