

D'UN HYPERCUBE À L'AUTRE

Pour dessiner l'hypercube H_n de dimension n , à partir de l'hypercube H_{n-1} de dimension $n-1$, on translate H_{n-1} pour obtenir une copie H_{n-1}' , puis on joint (en bleu) les sommets analogues.

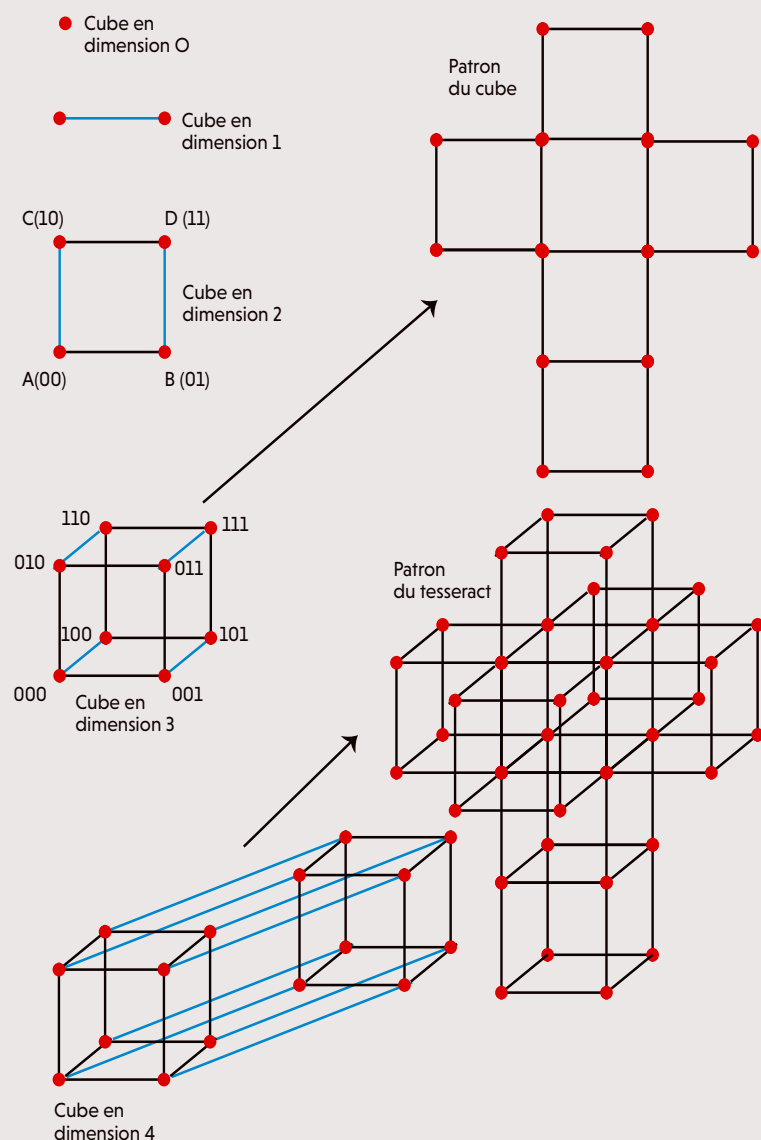
H_n a 2^n sommets qui sont les points dont toutes les coordonnées sont des 0 ou des 1. Il a $n \cdot 2^{n-1}$ arêtes, qui sont tous les segments de droite liant deux sommets ayant exactement $n-1$ coordonnées identiques. Par exemple, les sommets $(1, 0, 0, 1, 0)$ et $(1, 0, 0, 1, 1)$ sont liés par une arête dans le cas de l'hypercube de dimension 5.

Les coordonnées des sommets de H_n sont obtenues en ajoutant un 0 devant chacune des coordonnées des sommets de H_{n-1} et en ajoutant un 1 devant chacune des coordonnées des sommets de H_{n-1}' . Ainsi, les sommets $(0, 0, 1, 0, 0)$ et $(1, 0, 1, 0, 0)$ de H_5 proviennent du sommet $(0, 1, 0, 0)$ de H_4 .

La Grande Arche de la Défense, à Paris, est une représentation en trois dimensions d'un hypercube de dimension 4 parfois dénommé « tesseract » ou « octachore ».

On peut déplier les faces d'un cube pour les aplatir, ce qui donne six carrés collés en forme

de croix (l'une des branches étant plus longue). C'est ce que l'on désigne par un « patron ». De même, on peut déplier les « faces » de l'hypercube de dimension 4 qui sont des cubes de dimension 3 ; cela donne une sorte de croix composée de huit cubes (voir le schéma). Cette croix a servi de base au tableau *La Crucifixion (Corpus hypercubus)*, de Salvador Dali, peint en 1954 ; la géométrie lui avait été enseignée par le peintre mathématicien Marcel Duchamp. Sur le carrelage représenté, on distingue le patron du cube à trois dimensions.



2

> on joint 0000 à 1000, puis 0001 à 1001, etc. Au total, on a les 12 arêtes du premier cube, les 12 du second et 8 pour les relier, ce qui fait $2 \times 12 + 8 = 32$ arêtes. Une arête correspond à un segment reliant un sommet, par exemple 0100, à un sommet dont les coordonnées ne diffèrent que par une coordonnée: les quatre voisins de 0100 sont 1100, 0000, 0110 et 0101.

On parcourt les sommets du graphe H_4 sans repasser deux fois par le même et en n'utilisant que les arêtes de H_4 en empruntant le chemin: 0000-0001-0011-0010-0110-0111-0101-0100-1100-1101-1111-1110-1010-1011-1001-1000.

On a repris le parcours hamiltonien de H_3 en ajoutant un 0 devant chaque triplet. Puis on a repris à nouveau le même parcours à l'envers en ajoutant un 1 à chaque triplet. Par construction, à chaque fois que l'on passe d'un sommet au suivant, une seule coordonnée change.

Ce que nous venons d'expliquer se généralise de façon évidente pour l'hypercube de dimension n , H_n , qui a 2^n sommets: il se construit en prenant deux copies de l'hypercube de dimension $n-1$ et en y ajoutant des arêtes pour joindre les sommets analogues.

Le nombre d'arêtes de H_n est donc le double du nombre d'arêtes du graphe H_{n-1} , auquel on ajoute le nombre de sommets du graphe H_{n-1} , ce qui donne $n2^{n-1}$. Par la même méthode que pour H_4 , on dispose d'un parcours hamiltonien de H_n : on ajoute des 0 en tête des sommets du

parcours hamiltonien de H_{n-1} , puis, en reprenant ce parcours à l'envers, on ajoute des 1 en tête de chaque sommet d'une copie de H_{n-1} .

Voici maintenant trois énigmes, de la plus facile à la plus difficile, concernant H_3 , H_4 et H_5 qui éclairent la conjecture devenue théorème grâce à Hao Huang.

SOMMETS NON LIÉS

Problème 1. Quel est le nombre maximum de sommets que l'on peut choisir dans le cube H_3 tels qu'aucun ne soit relié à un autre par une arête?

La réponse est 4 (voir l'encadré 3). Il faut quelques secondes de réflexion pour se persuader qu'il est impossible de faire mieux. Si l'on veut être parfaitement rigoureux, on recherchera un raisonnement (ce n'est pas difficile), ou bien on énumérera les 56 façons de choisir 5 sommets parmi les 8 du cube et l'on constatera que pour chacune, il y a deux sommets reliés par une arête... et même qu'il existe toujours un sommet relié à deux autres.

Problème 2. Quel est le nombre maximum de sommets que l'on peut choisir dans l'hypercube H_4 de dimension 4, tels qu'aucun ne soit relié à un autre par une arête? La réponse est 8. L'encadré 3 indique comment choisir ces 8 sommets non reliés par une arête.

Montrer qu'il est impossible de faire mieux que 8 est plus compliqué que dans le problème 1. On se persuadera peut-être en essayant

UN JEUNE CHERCHEUR OBSTINÉ

Hao Huang, jeune mathématicien actuellement en poste à l'université Emory, aux États-Unis, a résolu en 2019 la « conjecture de la sensibilité ». Il avait entendu mentionner cette conjecture en 2012 par Michael Saks, du MIT (Massachusetts Institute of Technology). Il raconte : « À partir de ce moment, séduit par la simplicité et l'élégance de l'énoncé, je suis devenu obsédé par cette conjecture. À chaque fois que j'avais terminé un travail et qu'il avait été accepté pour publication, je revenais à ce problème. Bien sûr, j'abandonnais au bout de quelque temps et retournais vers des questions plus abordables. » Pendant six ans, Hao Huang a donc repensé au problème et y a épisodiquement consacré du temps.

En 2018, il remarqua qu'un théorème vieux de deux cents ans démontré par le mathématicien français Augustin Louis Cauchy pouvait peut-être l'aider. Ce théorème établit des relations

entre les « valeurs propres » d'une matrice et celles de ses sous-matrices, valeurs propres qui sont en rapport avec le nombre de voisins des sommets d'un graphe... ce qui justement était la question à laquelle avait été ramenée la conjecture de la sensibilité.

Alors qu'il était en train de rédiger une demande de subvention pour approfondir son idée, il comprit soudain qu'en changeant les signes d'une matrice, tout se mettait en place pour faire tomber la conjecture. En fait, tout était assez simple, il fallait juste lier plusieurs résultats et les manipuler pour voir surgir la solution dont la démonstration n'occupe finalement que deux pages dans l'article que Hao Huang a publié. Depuis, Donald Knuth, célèbre informaticien auteur d'une bible sur la programmation (*The Art of Computer Programming*), a d'ailleurs proposé une démonstration de la conjecture qui tient sur une seule page (voir la bibliographie).

