

2

UN JEUNE CHERCHEUR OBSTINÉ

Hao Huang, jeune mathématicien actuellement en poste à l'université Emory, aux États-Unis, a résolu en 2019 la « conjecture de la sensibilité ». Il avait entendu mentionner cette conjecture en 2012 par Michael Saks, du MIT (Massachusetts Institute of Technology). Il raconte : « À partir de ce moment, séduit par la simplicité et l'élégance de l'énoncé, je suis devenu obsédé par cette conjecture. À chaque fois que j'avais terminé un travail et qu'il avait été accepté pour publication, je revenais à ce problème. Bien sûr, j'abandonnais au bout de quelque temps et retournais vers des questions plus abordables. » Pendant six ans, Hao Huang a donc repensé au problème et y a épisodiquement consacré du temps.

En 2018, il remarqua qu'un théorème vieux de deux cents ans démontré par le mathématicien français Augustin Louis Cauchy pouvait peut-être l'aider. Ce théorème établit des relations

entre les « valeurs propres » d'une matrice et celles de ses sous-matrices, valeurs propres qui sont en rapport avec le nombre de voisins des sommets d'un graphe... ce qui justement était la question à laquelle avait été ramenée la conjecture de la sensibilité.

Alors qu'il était en train de rédiger une demande de subvention pour approfondir son idée, il comprit soudain qu'en changeant les signes d'une matrice, tout se mettait en place pour faire tomber la conjecture. En fait, tout était assez simple, il fallait juste lier plusieurs résultats et les manipuler pour voir surgir la solution dont la démonstration n'occupe finalement que deux pages dans l'article que Hao Huang a publié. Depuis, Donald Knuth, célèbre informaticien auteur d'une bible sur la programmation (*The Art of Computer Programming*), a d'ailleurs proposé une démonstration de la conjecture qui tient sur une seule page (voir la bibliographie).

> on joint 0000 à 1000, puis 0001 à 1001, etc. Au total, on a les 12 arêtes du premier cube, les 12 du second et 8 pour les relier, ce qui fait $2 \times 12 + 8 = 32$ arêtes. Une arête correspond à un segment reliant un sommet, par exemple 0100, à un sommet dont les coordonnées ne diffèrent que par une coordonnée : les quatre voisins de 0100 sont 1100, 0000, 0110 et 0101.

On parcourt les sommets du graphe H_4 sans repasser deux fois par le même et en n'utilisant que les arêtes de H_4 en empruntant le chemin : 0000-0001-0011-0010-0110-0111-0101-0100-1100-1101-1111-1110-1010-1011-1001-1000.

On a repris le parcours hamiltonien de H_3 en ajoutant un 0 devant chaque triplet. Puis on a repris à nouveau le même parcours à l'envers en ajoutant un 1 à chaque triplet. Par construction, à chaque fois que l'on passe d'un sommet au suivant, une seule coordonnée change.

Ce que nous venons d'expliquer se généralise de façon évidente pour l'hypercube de dimension n , H_n , qui a 2^n sommets : il se construit en prenant deux copies de l'hypercube de dimension $n-1$ et en y ajoutant des arêtes pour joindre les sommets analogues.

Le nombre d'arêtes de H_n est donc le double du nombre d'arêtes du graphe H_{n-1} , auquel on ajoute le nombre de sommets du graphe H_{n-1} , ce qui donne $n2^{n-1}$. Par la même méthode que pour H_4 , on dispose d'un parcours hamiltonien de H_n : on ajoute des 0 en tête des sommets du

parcours hamiltonien de H_{n-1} , puis, en reprenant ce parcours à l'envers, on ajoute des 1 en tête de chaque sommet d'une copie de H_{n-1} .

Voici maintenant trois énigmes, de la plus facile à la plus difficile, concernant H_3 , H_4 et H_5 qui éclairent la conjecture devenue théorème grâce à Hao Huang.

SOMMETS NON LIÉS

Problème 1. Quel est le nombre maximum de sommets que l'on peut choisir dans le cube H_3 tels qu'aucun ne soit relié à un autre par une arête?

La réponse est 4 (voir l'encadré 3). Il faut quelques secondes de réflexion pour se persuader qu'il est impossible de faire mieux. Si l'on veut être parfaitement rigoureux, on recherchera un raisonnement (ce n'est pas difficile), ou bien on énumérera les 56 façons de choisir 5 sommets parmi les 8 du cube et l'on constatera que pour chacune, il y a deux sommets reliés par une arête... et même qu'il existe toujours un sommet relié à deux autres.

Problème 2. Quel est le nombre maximum de sommets que l'on peut choisir dans l'hypercube H_4 de dimension 4, tels qu'aucun ne soit relié à un autre par une arête? La réponse est 8. L'encadré 3 indique comment choisir ces 8 sommets non reliés par une arête.

Montrer qu'il est impossible de faire mieux que 8 est plus compliqué que dans le problème 1. On se persuadera peut-être en essayant



LA CONJECTURE DE LA SENSITIVITÉ

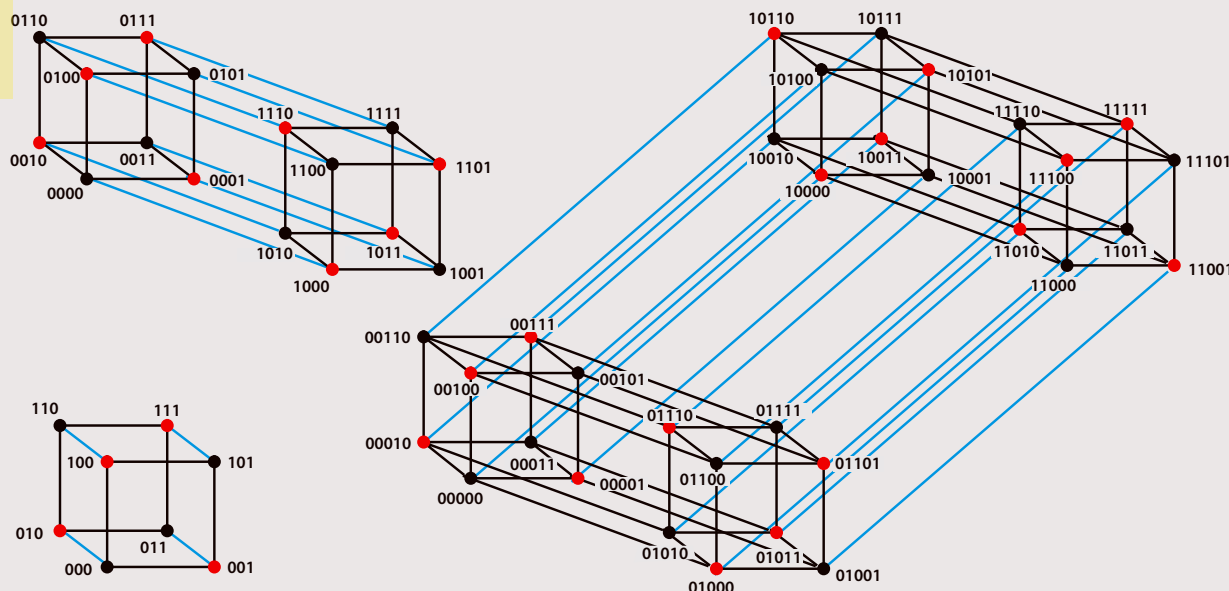
On avait montré que la conjecture de la sensibilité, qui porte sur les mesures de complexité des fonctions booléennes, est équivalente à une conjecture sur les sommets de l'hypercube H_n et c'est cette dernière formulation que Hao Huang a démontrée. Il a montré que si l'on prend $2^{n-1} + 1$ sommets de H_n , alors l'un au moins de ces sommets est relié à au moins $\sqrt{n}$ autres sommets parmi ceux retenus.

Autrement dit : dès qu'on prend 5 sommets du cube H_3 , l'un des sommets est lié à 2 autres ; dès qu'on prend 9 sommets de H_4 , l'un des sommets est lié à 2 autres ; dès qu'on prend 17 sommets de H_5 , l'un des sommets est lié à 3 autres ; et ainsi de suite.

Cette affirmation est d'autant plus étonnante que l'on peut trouver 4 sommets du cube H_3 sans aucun lien, 8 sommets de H_4 sans

aucun lien, 16 sommets de H_5 sans aucun lien, etc.

Les dessins ci-dessous représentent ces façons de choisir 2^{n-1} sommets de H_n sans liens entre eux. La méthode utilisée pour ces choix est assez simple : prendre les sommets dont les coordonnées comportent un nombre pair de 1 (en noir sur le dessin).



de trouver 9 sommets et en constatant que l'on n'y arrive jamais. Cependant, pour l'établir en toute rigueur, il faut soit trouver un raisonnement mathématique, soit envisager tous les sous-ensembles de 9 sommets pris dans les 16 sommets de H_4 et constater pour chacun que l'on a deux sommets reliés par une arête. Cela exige d'envisager $16!/(9!7!) = 11\,440$ cas (nombre de sous-ensembles de 9 éléments pris parmi un ensemble de 16 éléments).

Ce travail d'exploration de 11 440 cas est difficilement envisageable à la main. J'ai écrit un programme qui réalise cette énumération et, effectivement, il m'a indiqué que pour chacune des 11 440 façons de prendre 9 sommets de H_4 , il y a au moins un sommet relié à un autre. Mon programme m'a aussi signalé que dans chaque cas, il y a au moins un sommet relié à deux autres !

Problème 3. Quel est le plus grand nombre de sommets que l'on peut choisir dans H_5 de telle façon qu'aucun ne soit relié à un autre par une arête ?

La réponse est 16. D'une part, en s'inspirant de ce qui s'est passé pour la dimension 4, il est assez facile de choisir 16 sommets sans

que deux soient reliés par une arête. On prend la solution à 8 éléments pour le premier hypercube H_4 qui engendre H_5 . On prend la solution complémentaire pour le second et tout est bon (voir l'encadré 3). On remarque alors que les sommets retenus sont ceux dont les coordonnées comportent un nombre pair de 1. Il est clair qu'un sommet ayant un nombre pair de 1 dans ses coordonnées n'est relié qu'à des sommets ayant un nombre impair de 1 dans ses coordonnées, ce qui confirme que la solution proposée est satisfaisante. Elle se généralise et montre que l'on peut toujours choisir 2^{n-1} sommets du graphe H_n sans que deux soient reliés.

Bien sûr, pour démontrer que 17 est impossible, le problème combinatoire est devenu colossal, car il y a $32!/(17!15!) = 565\,722\,720$ cas à envisager.

Ce qui s'est passé pour le problème 2 se reproduit en plus étonnant encore. Dès que l'on prend 17 sommets, on ne peut éviter qu'un sommet soit lié à trois autres. Le nombre maximum de voisins d'un sommet d'un graphe se nomme le « degré du graphe ». Le plus petit degré possible pour un sous-graphe de 16 sommets de H_4 , qui est 0, passe donc à 3 avec un