

LA CONJECTURE DE LA SENSITIVITÉ

3

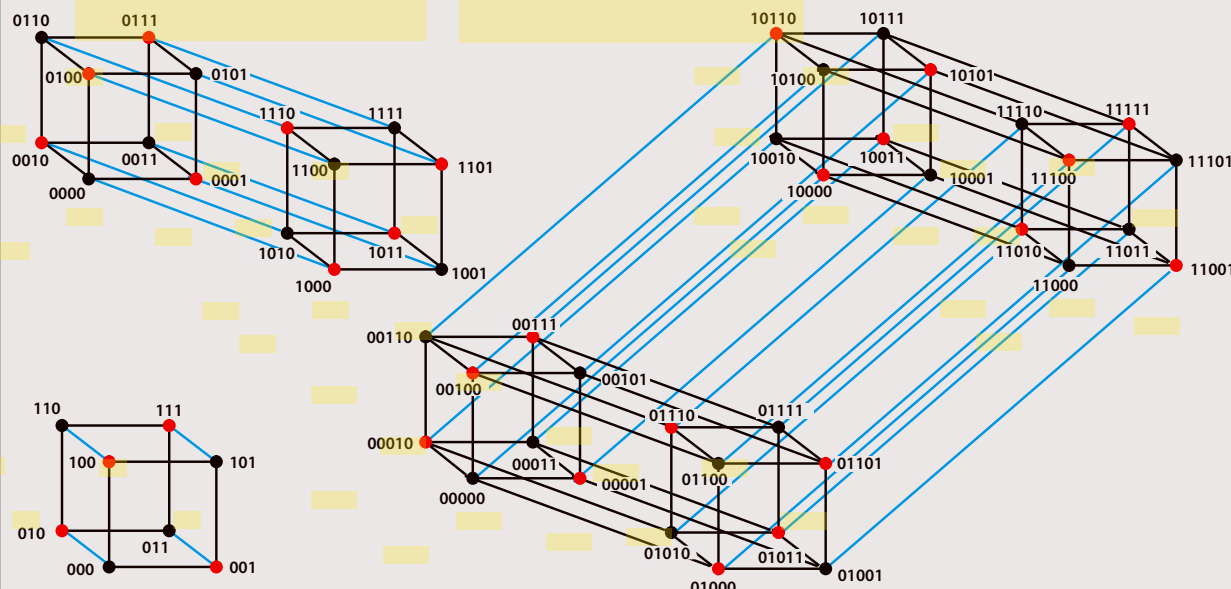
On avait montré que la conjecture de la sensibilité, qui porte sur les mesures de complexité des fonctions booléennes, est équivalente à une conjecture sur les sommets de l'hypercube H_n et c'est cette dernière formulation que Hao Huang a démontrée. Il a montré que si l'on prend $2^{n-1} + 1$ sommets de H_n , alors l'un au moins de ces sommets est relié à au moins $\sqrt{n}$ autres sommets parmi ceux retenus.

Autrement dit : dès qu'on prend 5 sommets du cube H_3 , l'un des sommets est lié à 2 autres ; dès qu'on prend 9 sommets de H_4 , l'un des sommets est lié à 2 autres ; dès qu'on prend 17 sommets de H_5 , l'un des sommets est lié à 3 autres ; et ainsi de suite.

Cette affirmation est d'autant plus étonnante que l'on peut trouver 4 sommets du cube H_3 sans aucun lien, 8 sommets de H_4 sans

aucun lien, 16 sommets de H_5 sans aucun lien, etc.

Les dessins ci-dessous représentent ces façons de choisir 2^{n-1} sommets de H_n sans liens entre eux. La méthode utilisée pour ces choix est assez simple : prendre les sommets dont les coordonnées comportent un nombre pair de 1 (en noir sur le dessin).



de trouver 9 sommets et en constatant que l'on n'y arrive jamais. Cependant, pour l'établir en toute rigueur, il faut soit trouver un raisonnement mathématique, soit envisager tous les sous-ensembles de 9 sommets pris dans les 16 sommets de H_4 et constater pour chacun que l'on a deux sommets reliés par une arête. Cela exige d'envisager $16!/(9!7!) = 11\,440$ cas (nombre de sous-ensembles de 9 éléments pris parmi un ensemble de 16 éléments).

Ce travail d'exploration de 11 440 cas est difficilement envisageable à la main. J'ai écrit un programme qui réalise cette énumération et, effectivement, il m'a indiqué que pour chacune des 11 440 façons de prendre 9 sommets de H_4 , il y a au moins un sommet relié à un autre. Mon programme m'a aussi signalé que dans chaque cas, il y a au moins un sommet relié à deux autres !

Problème 3. Quel est le plus grand nombre de sommets que l'on peut choisir dans H_5 de telle façon qu'aucun ne soit relié à un autre par une arête ?

La réponse est 16. D'une part, en s'inspirant de ce qui s'est passé pour la dimension 4, il est assez facile de choisir 16 sommets sans

que deux soient reliés par une arête. On prend la solution à 8 éléments pour le premier hypercube H_4 qui engendre H_5 . On prend la solution complémentaire pour le second et tout est bon (voir l'encadré 3). On remarque alors que les sommets retenus sont ceux dont les coordonnées comportent un nombre pair de 1. Il est clair qu'un sommet ayant un nombre pair de 1 dans ses coordonnées n'est relié qu'à des sommets ayant un nombre impair de 1 dans ses coordonnées, ce qui confirme que la solution proposée est satisfaisante. Elle se généralise et montre que l'on peut toujours choisir 2^{n-1} sommets du graphe H_n sans que deux soient reliés.

Bien sûr, pour démontrer que 17 est impossible, le problème combinatoire est devenu colossal, car il y a $32!/(17!15!) = 565\,722\,720$ cas à envisager.

Ce qui s'est passé pour le problème 2 se reproduit en plus étonnant encore. Dès que l'on prend 17 sommets, on ne peut éviter qu'un sommet soit lié à trois autres. Le nombre maximum de voisins d'un sommet d'un graphe se nomme le « degré du graphe ». Le plus petit degré possible pour un sous-graphe de 16 sommets de H_4 , qui est 0, passe donc à 3 avec un