

qu'on peut la casser. Pour en être certain, le plus simple est de disposer de résultats mathématiques généraux reliant les diverses mesures de complexité les unes aux autres et qui assureront que, dès qu'une mesure pour f est élevée, c'est aussi le cas pour les autres.

De tels résultats servent à concevoir aisément des fonctions booléennes résistantes aux attaques. Mais un autre motif pour rechercher des liens entre les diverses mesures de complexité des fonctions booléennes est simplement que les mathématiciens aiment savoir, quand ils introduisent des notions portant sur les mêmes objets, quelles relations les lient.

Le résultat de Hao Huang sur les hypercubes a justement comme conséquence qu'une mesure naturelle de complexité, la «sensitivité» (définie plus loin) est liée aux autres. Les travaux antérieurs avaient relié toutes les mesures naturelles de complexité des fonctions booléennes, sauf la sensibilité, qui faisait bande à part.

LA SENSITIVITÉ BOOLÉENNE

Pour saisir l'éclaircissement que Hao Huang a apporté, considérons trois des mesures de complexité les plus courantes et indiquons où le résultat de Huang intervient. Commençons par la mesure de complexité récalcitrante, la «sensitivité».

La sensibilité d'une fonction booléenne f au point $x = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ est le nombre de x' liés à x sur l'hypercube H_n tels que $f(x') \neq f(x)$; autrement dit, c'est le nombre de coordonnées de x qui changent la valeur $f(x)$ quand on les modifie. Cette mesure est une sorte de dérivée de f en x : si f bouge beaucoup quand on envisage des points proches de x sur H_n , alors la sensibilité de f est élevée en x .

Par définition, la sensibilité d'une fonction booléenne f est le maximum de la sensibilité de f en x quand on fait varier le point x dans H_n . Cette mesure est une évaluation globale de l'agitation de f : on la note $s(f)$.

Par exemple, la fonction booléenne $f(A, B) = (A \text{ ou } B)$ a une sensibilité 0 en $x = (1, 1)$; en effet, $(1 \text{ ou } 1) = 1$ et quand on change la première coordonnée ou la seconde, le résultat ne change pas, puisque $(0 \text{ ou } 1) = (1 \text{ ou } 0) = 1$. Elle a en revanche une sensibilité égale à 2 en $x = (0, 0)$, car $(0 \text{ ou } 0) = 0$, valeur qui change en modifiant la première ou la seconde coordonnée: $(1 \text{ ou } 0) = 1$, $(0 \text{ ou } 1) = 1$. La sensibilité de la fonction booléenne $f(A, B) = (A \text{ ou } B)$ est donc 2: $s(f) = 2$.

Une deuxième mesure de complexité pour les fonctions booléennes est la «complexité en arbre de décision». Une fonction booléenne étant fixée, on considère les algorithmes qui posent des questions de type: «Quelle est la valeur de la variable X ?» puis, prenant en compte les réponses précédentes, «Quelle est la

valeur de la variable Y ?», etc., jusqu'à avoir assez d'information pour déterminer $f(x)$. Le meilleur algorithme est celui qui sait déterminer $f(x)$ pour tout x en un minimum de questions; ce minimum est la complexité en arbre de décision de f , notée $ad(f)$.

Prenons l'exemple $f(A, B, C, D, E) = (A \text{ ET } B \text{ ET } E) \text{ OU } (C \text{ ET } D \text{ ET NON}(E))$.

Bien qu'il y ait cinq variables, trois questions suffiront toujours pour connaître la valeur de f en un point, car selon que E est vrai (1) ou faux (0), il faut s'intéresser à la première partie de l'expression définissant f ou à la seconde. Le meilleur algorithme d'interrogation est donc:

- 1) Demander la valeur de E ;
- 2) Si E est vrai, demander A , puis, si A est vrai, demander B ;
- 3) Si E est faux, demander C , puis, si C est vrai, demander D .

En trois questions et parfois deux, on connaît ainsi la valeur de f . On ne peut pas faire mieux que 3, donc $ad(f) = 3$.

Une troisième mesure de complexité d'une fonction booléenne est le «degré» défini de la façon suivante. Toute fonction booléenne peut s'écrire de façon unique comme une somme de conjonctions du type:

$$f(A, B, C) = (A \text{ ET } B) + (B \text{ ET } C) + (A \text{ ET } C)$$

où le + désigne le «ou exclusif»: $P + Q$ est vrai si « P est vrai et Q faux», ou si « P est faux et Q vrai». Le degré de f , noté $deg(f)$, est le plus grand nombre de variables qu'on trouve dans un terme de cette expression de f . Ici, c'est 2: $deg(f) = 2$.

Quels sont les liens entre ces trois mesures de complexité et d'autres encore? Pour les deux dernières et les autres, la réponse était connue: chacune est majorée par un polynôme en fonction de l'autre, puisque l'on a toujours:

$$deg(f) < ad(f) < 16 [deg(f)]^8.$$

Pour avoir des relations liant la sensibilité $s(f)$ aux autres mesures de complexité, il était établi que la question se ramenait à celle concernant les sous-graphes de H_n que Hao Huang a résolue et que nous avons expliquée. Ce travail a permis de savoir que $[s(f)]^2 \geq deg(f)$, ce qui, avec les autres résultats connus, permet de conclure à l'équivalence, à un polynôme près, des mesures de complexité des fonctions booléennes.

Le résultat de Hao Huang est théorique, mais il est aussi pratique puisque la vitesse optimale de calcul de certains circuits électroniques est directement liée à ces mesures de complexité. La preuve en deux pages de Hao Huang est assez simple. En une heure de lecture, un mathématicien connaissant le sujet peut la vérifier.

Scott Aaronson, de l'université du Texas à Austin, remarque qu'une recherche pendant trente ans par des dizaines de mathématiciens, certains très brillants, a été nécessaire pour aboutir à une preuve qui se vérifie en une heure: prouver est bien plus difficile que vérifier! ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Karthikeyan et al., **On the resolution of the sensitivity conjecture**, *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, vol. 57(4), pp. 615-638, 2020.

H. Huang, **Induced subgraphs of hyper-cubes and a proof of the sensitivity conjecture**, *Ann. of Math.*, vol. 190(3), pp. 949-955, 2019.

D. Knuth, **A computational proof of Huang's degree theorem** (démonstration en une page du résultat de Hao Huang), 2019 : <https://www.cs.stanford.edu/~knuth/papers/huang.pdf>

S. Jukna, **Boolean Function Complexity**, Springer, 2012.

H. Buhrman et R. de Wolf, **Complexity measures and decision tree complexity : a survey**, *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 288(1), pp. 21-43, 2002.

C. Gotsman et N. Linial, **The equivalence of two problems on the cube**, *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 61(1), pp. 142-146, 1992.

N. Nisan et M. Szegedy, **On the degree of Boolean functions as real polynomials**, *Computational Complexity*, vol. 4, pp. 301-313, 1994.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

LA TENSÉGRITÉ ET LA TABLE IMPOSSIBLE

Construire des structures rigides mais aériennes composées uniquement de barres reliées par des câbles: telle est l'idée à la base du concept de tenségrité en architecture.

Récemment, les réseaux sociaux se sont entichés d'un mobilier étonnant, présenté comme une application du principe de «tenségrité»: une table dont le plateau semble flotter comme par magie, maintenu uniquement par des fils ou des câbles le reliant à la base au-dessous (voir l'illustration ci-contre). Cette «table impossible» surprend car, spontanément, si nous devons utiliser des câbles pour suspendre des objets, nous les attachons par le haut pour s'opposer à la gravité.

Cette impression de «suspension par en dessous» est l'une des particularités que l'on retrouve dans toutes les constructions reposant sur la tenségrité, concept architectural qui consiste à assurer la rigidité des structures en associant avec élégance des éléments en tension et des éléments en compression.

«La tenségrité, ce sont des îles de compression dans un océan de tension»: telle est la définition que proposait l'architecte américain Richard Buckminster Fuller (1895-1983), l'un de ses inventeurs. Pour comprendre ce que cela signifie et implique, remontons dans le temps.

DES ÎLES DE COMPRESSION DANS UN OCÉAN DE TENSION

Jusqu'au milieu du XIX^e siècle, la plupart des matériaux utilisés pour la construction étaient particulièrement performants pour résister aux contraintes de compression: c'est notamment le cas de la pierre ou des briques. Ces matériaux (à l'exception notable du bois) sont en revanche moins robustes face à des contraintes de tension, c'est-à-dire à des situations où ils sont étirés. Pour ne donner qu'un exemple, la brique résiste à des forces de 1,5 kilonewton (soit le poids de 150 kilogrammes) par centimètre carré en

compression, mais à des contraintes trois fois inférieures en tension.

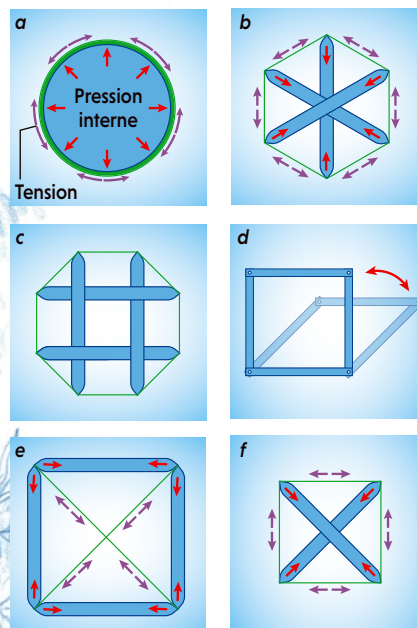
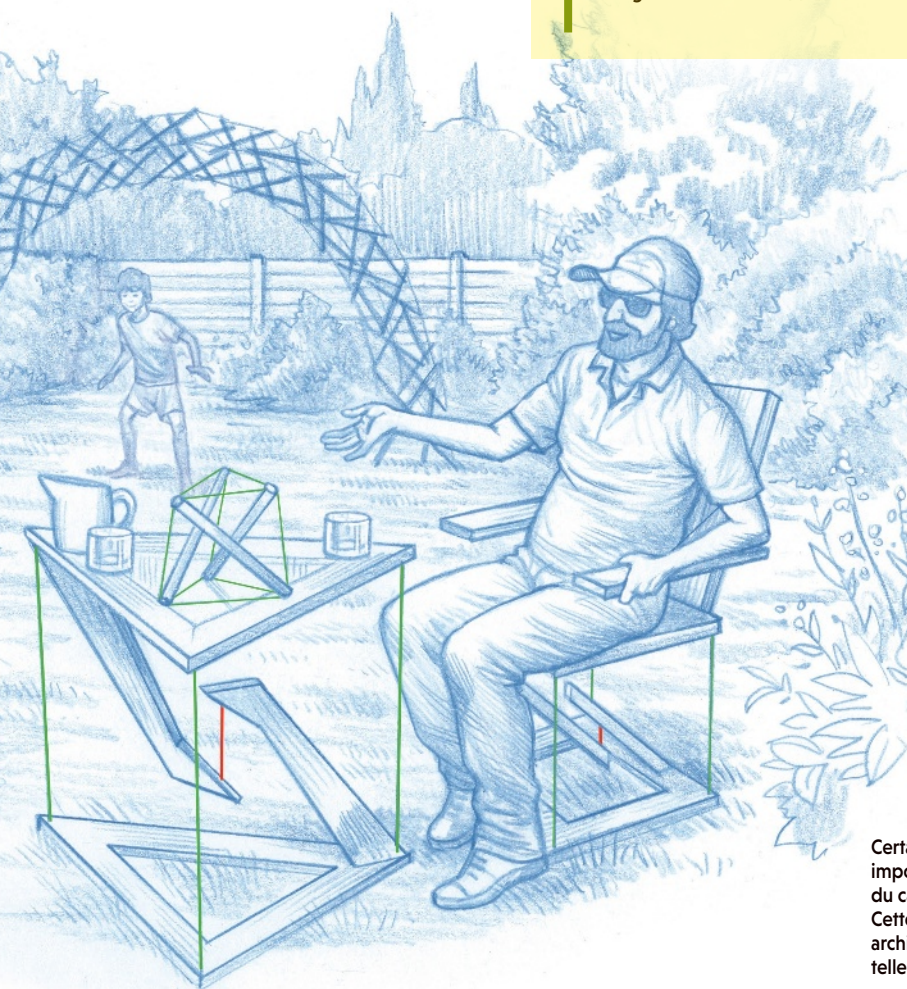
Les bâtiments étaient donc conçus pour que n'apparaissent pas dans les matériaux d'efforts de tension. Ils présentaient bien souvent un aspect assez massif et plein pour les plus grands d'entre eux. Il a fallu tout le génie des constructeurs de cathédrales et la technique des arcs-boutants pour réaliser des bâtiments «aériens» en pierre.

Pour trouver des constructions alliant solidité et légèreté, c'est vers la marine et les constructions navales qu'il faut se tourner. La nécessité de flotter (donc d'avoir le moins de masse possible) et de contrôler la force du vent a conduit à réaliser des



TENSÉGRITÉ À DEUX DIMENSIONS

Un ballon gonflé est rigide, car la pression de l'air intérieur met en tension l'enveloppe (a). Une configuration analogue de forces de tension et de compression est à l'œuvre dans des structures rigides comme celles représentées en b et c et qui relèvent du concept de tenségrité : les câbles du contour sont en tension tandis que les tiges, dans l'intérieur, sont en compression. Un carré constitué de quatre tiges articulées à leurs extrémités n'est pas rigide (d). Pour le rigidifier, il suffit de relier les sommets opposés par des câbles (e) ; dans ce cas, les câbles sont en tension. Un théorème de dualité montre que l'on peut échanger les tiges et les câbles (f) : la structure ainsi obtenue est rigide aussi.



Certaines constructions surprennent, comme la « table impossible », dont le plateau est suspendu par le bas (à l'aide du câble rouge, les câbles verts n'assurant que la stabilité). Cette table et ces chaises évoquent des structures architecturales fondées sur le concept de tenségrité, telles que l'objet posé sur la table et l'arche.

structures dont la partie rigide en bois (mât et coque) est résistante à la compression, tandis que les éléments chargés de canaliser et transmettre au navire la force considérable du vent sont des éléments souples résistants à la tension : la toile des voiles ainsi que le cordage du gréement.

C'est ce souci de légèreté que l'on retrouve plus tard dans les premiers avions, avec une structure en bois recouverte de toile huilée et rigidifiée par de nombreux câbles tendus.

Mais où est la physique dans tout ce savoir-faire d'ingénieur ? Du côté de la théorie de la rigidité structurale, dont les bases ont été posées au XIX^e siècle par James Clerk Maxwell (1831-1879). Ce

grand physicien écossais s'est intéressé aux conditions nécessaires pour assurer la rigidité d'une structure composée de barres rigides assemblées entre elles par des articulations flexibles (charnières, pivots...). Seuls les résultats pour des structures à deux dimensions nous seront utiles pour la suite.

Un triangle formé de trois barres jointes à leurs extrémités est ainsi une structure naturellement rigide. Ce n'est en revanche pas le cas d'un carré, qui peut se déformer en losange si l'on agit sur les deux sommets opposés d'une diagonale (voir l'encadré ci-dessus, d).

Une façon de rigidifier le carré est d'y adjoindre une barre qui rejoint justement

ces deux sommets opposés. Selon que l'on cherche ensuite à écarter ou à rapprocher ces sommets, cette barre se trouvera soit en tension, soit en compression. Il est toutefois possible de rigidifier le carré avec uniquement deux câbles tendus, qui relient chacun les deux paires de sommets opposés. On obtiendra une structure d'autant plus rigide que ces câbles sont tendus et les barres se trouveront alors en compression.

Les auteurs ont notamment publié : **En avant la physique !**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).

