

R

ENDEZ-VOUS

P.72 Logique & calcul
 P.78 Art & science
 P.80 Idées de physique
 P.84 Chroniques de l'évolution
 P.88 Science & gastronomie
 P.90 À picorer

PATIENCE EN NOIR ET ROUGE

Les patiences sont un stimulant prétexte pour faire des raisonnements stratégiques et des calculs probabilistes.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En cas de confinement total avec interdiction de s'approcher de quiconque et si tous les réseaux et ordinateurs tombent en panne, il vous restera la lecture, le dessin, le bricolage et... les patiences, aussi dénommées solitaires ou réussites.

Ces jeux avec des pions ou des cartes se jouent seul. Après une série de manipulations selon les règles de la patience, vous serez gagnant ou perdant. Il y a deux catégories de patiences. Les patiences «déterministes» ou «automatiques» sont celles où vous devez simplement suivre des règles parfaitement précises ne vous laissant aucun choix. À l'opposé, les patiences «stratégiques» présentent des situations où plusieurs actions sont possibles et qui, selon vos choix, vous conduiront à gagner ou à perdre.

Pour les patiences déterministes, le hasard intervient avant le début du jeu et provient de l'ordre initial des cartes du paquet : le mécanisme d'une patience déterministe vous conduit à la victoire ou à la défaite, celle-ci étant fixée par avance et cachée dans le paquet dès le début des manipulations, qui ne font que la décoder.

Les patiences stratégiques incitent à réfléchir pour trouver la meilleure façon de jouer. Nous donnerons des exemples de patiences stratégiques dont on peut trouver la stratégie optimale de jeu. Les patiences déterministes semblent sans intérêt, puisqu'elles reviennent à tirer à pile ou face «partie gagnée» ou «partie perdue». Sauf que ce n'est pas vraiment comme un tirage à pile ou face puisqu'on ignore quelle est la probabilité de gagner. C'est là que se trouve l'intérêt de ces patiences. Évaluer la probabilité de gagner peut

être difficile et l'ordinateur est souvent indispensable pour effectuer le calcul.

Les réussites envisagées ici sont aussi simples que possible et, d'ailleurs, seule la couleur «noire» ou «rouge» des cartes y aura de l'importance. Les maîtriser occupe un bon moment, ce qui prouve que même des jeux à l'apparence idiote ont un intérêt pour l'amateur curieux et mathématicien.

LA PATIENCE «N'EN GARDER QU'UNE»

La patience «N'en garder qu'une» est d'une simplicité extrême. Y jouer et la proposer à des élèves pour qu'ils devinent comment gagner est un exercice intéressant dès la classe de sixième.

On prend un jeu de cartes quelconques bien battu et on étale en ligne 8 cartes ou plus dont seules les couleurs rouge (R) ou noire (N) sont importantes. Par exemple :

R—N—R—R—N—R—N—R—N.

Quelles sont les règles ? À chaque étape, on déplace au choix un paquet de cartes dont la couleur de la carte supérieure est différente de la carte supérieure du paquet à sa gauche ; on pose le paquet sélectionné sur celui à sa gauche. Les paquets restants sont alors resserrés. On dit qu'on «replie» la ligne. Pour gagner, il faut tout replier en un seul paquet.

Avec notre exemple, on commence avec la ligne :

R—N—R—R—N—R—N—R—N.

En partant de la gauche, on prend la dernière carte et on la place au-dessus sur l'avant-dernière, ce qui est autorisé puisque ces deux cartes sont de couleurs différentes :

R—N—R—R—N—R—N—N/R—N.

Un second mouvement consiste à prendre l'avant-dernière carte et à la placer sur celle à sa gauche :

R—N—R—R—N—N/R—N/R.

On poursuit par exemple de cette façon :

R—N—R—N/R—N/R—N/R;

R—N—N/R—N/R—N/R;

N/R—N/R—N/R—N/R.

Arrivé à ces quatre paquets, on ne peut plus rien faire et on a perdu, puisqu'il fallait aboutir à un seul paquet. Avec la configuration initiale de l'exemple, il y a une façon de réussir... que je vous laisse chercher.

Deux questions générales se posent. Quelle est la meilleure façon de jouer ? Et si on l'utilise, quelle est alors la probabilité de gagner ? Des réponses viennent assez rapidement.

Situations perdantes. Il est évident que si la ligne se termine par deux cartes ou plus de la même couleur, il sera impossible d'arriver à un seul paquet, car chaque manipulation maintiendra identique les cartes au-dessus des deux derniers paquets, qui ne pourront donc jamais se replier en un seul.

Situations gagnantes et stratégie. Si les deux dernières cartes de la ligne sont de couleurs différentes, on utilise la méthode suivante qui permet de gagner à coup sûr. On se sert de l'avant-dernière carte et de celles de la même couleur pour faire disparaître toutes les cartes de couleur opposée en procédant de la droite vers la gauche. L'avant-dernière carte est utilisée pour recouvrir toutes les cartes de couleur opposée qui la précèdent. Puis la carte de la même couleur placée à sa gauche est utilisée de même, et ainsi de suite. Une fois qu'il ne reste que la dernière carte et des cartes de couleur opposée à sa gauche, on utilise cette dernière carte pour recouvrir toutes les autres une à une. On a alors un paquet unique.

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir la possibilité de gagner est donc que les deux dernières cartes soient de couleur différentes.

La probabilité d'avoir la possibilité de gagner est donc la probabilité que les deux dernières cartes soient (R, N) ou (N, R). Si le paquet utilisé pour composer la ligne de départ possède r cartes rouges et n cartes noires, cette probabilité est :

$$\frac{r}{r+n} \times \frac{n}{r+n-1} + \frac{n}{r+n} \times \frac{r}{r+n-1} = \frac{2rn}{(r+n)(r+n-1)}.$$

Avec un jeu de 32 cartes (16 R, 16 N), cela donne $2 \times 16 \times 16 / (32 \times 31) = 51,61\%$, ce qui est plutôt satisfaisant !

« EN GARDER DEUX DE LA MÊME COULEUR »

Envisageons maintenant des variantes dont l'analyse complète est encore possible. Pour la variante « En garder deux de la même couleur », les règles sont les mêmes, mais le but est d'arriver à avoir exactement deux >

1



HISTOIRE DES SOLITAIRES ET PATIENCES

Le jeu de plateau dénommé *Solitaire* existe depuis au moins trois siècles et se joue seul. Il consiste à faire disparaître tous les pions sauf un d'un damier (souvent en forme de croix) en les « sautant » les uns après les autres comme au jeu de dames.

En 1697, il est décrit et étudié dans la revue *Le Mercure Galant* (devenu plus tard *Le Mercure de France*), où il est introduit par les phrases : « Le jeu appelé du Solitaire est tellement à la mode, que vous & vos Amies, vous ne serez pas fâchées d'en avoir des règles certaines. [...] De quelque pays que soit cet étranger, il a Esté bien reçu en France, où il vient d'arriver. Il plaist à la Cour, à Paris, & dans la Province ; on le veut avoir partout. » Le jeu a été étudié par Gottfried Leibniz, Martin Gardner, Nicolaas De Bruijn, John Conway et bien d'autres (voir par exemple l'article de Christopher Jefferson et al. cité dans la bibliographie).

Dans une lettre au mathématicien Pierre Rémond de Montfort le 17 janvier 1716, Leibniz écrivait : « Après les jeux qui dépendent des nombres, viennent les jeux où entre encore la situation, comme dans le Trictrac, dans les Dames, et surtout dans les Échecs. Le jeu nommé le Solitaire me plaît assez. Je le pris d'une manière renversée, c'est-à-dire, au lieu de défaire un composé de pièces selon la loi de ce jeu,

qui est de sauter dans une place vide, et ôter la pièce sur laquelle on saute, j'ai cru qu'il serait plus beau de rétablir ce qui a esté défait, en remplissant un trou sur lequel on saute... » (voir l'article de Mary Sol de Mora-Charles cité dans la bibliographie).

Les jeux de cartes qu'on joue seul, dénommés « patiences », « solitaires » ou « réussites », existent semble-t-il seulement depuis la fin du XVIII^e siècle. En France, ils furent rendus populaires par le livre de la Marquise de Fortia, paru en 1842, *Le Livre des patiences* (publié sous le nom d'auteur Madame de F***). Il est téléchargeable sur : <https://gallica.bnf.fr>

La plus célèbre des patiences est sans doute *Klondike*, qui, aujourd'hui, est proposée pour téléphone ou ordinateur. Bien qu'ayant donné lieu à de nombreuses études, la probabilité de gagner une partie n'est pas connue avec précision, ce qui a fait dire à Persi Diaconis, célèbre prestidigitateur et mathématicien américain, ami de Martin Gardner, que l'incapacité de calculer cette probabilité est un échec embarrassant des probabilités appliquées.

Dans le présent article, on envisage trois types de patiences avec des cartes. Elles sont toutes très simples et les règles ne prennent en compte que la couleur rouge ou noire des cartes.