

Un second mouvement consiste à prendre l'avant-dernière carte et à la placer sur celle à sa gauche :

R—N—R—R—N—N/R—N/R.

On poursuit par exemple de cette façon :

R—N—R—N/R—N/R—N/R;

R—N—N/R—N/R—N/R;

N/R—N/R—N/R—N/R.

Arrivé à ces quatre paquets, on ne peut plus rien faire et on a perdu, puisqu'il fallait aboutir à un seul paquet. Avec la configuration initiale de l'exemple, il y a une façon de réussir... que je vous laisse chercher.

Deux questions générales se posent. Quelle est la meilleure façon de jouer ? Et si on l'utilise, quelle est alors la probabilité de gagner ? Des réponses viennent assez rapidement.

Situations perdantes. Il est évident que si la ligne se termine par deux cartes ou plus de la même couleur, il sera impossible d'arriver à un seul paquet, car chaque manipulation maintiendra identique les cartes au-dessus des deux derniers paquets, qui ne pourront donc jamais se replier en un seul.

Situations gagnantes et stratégie. Si les deux dernières cartes de la ligne sont de couleurs différentes, on utilise la méthode suivante qui permet de gagner à coup sûr. On se sert de l'avant-dernière carte et de celles de la même couleur pour faire disparaître toutes les cartes de couleur opposée en procédant de la droite vers la gauche. L'avant-dernière carte est utilisée pour recouvrir toutes les cartes de couleur opposée qui la précèdent. Puis la carte de la même couleur placée à sa gauche est utilisée de même, et ainsi de suite. Une fois qu'il ne reste que la dernière carte et des cartes de couleur opposée à sa gauche, on utilise cette dernière carte pour recouvrir toutes les autres une à une. On a alors un paquet unique.

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir la possibilité de gagner est donc que les deux dernières cartes soient de couleur différentes.

La probabilité d'avoir la possibilité de gagner est donc la probabilité que les deux dernières cartes soient (R, N) ou (N, R). Si le paquet utilisé pour composer la ligne de départ possède r cartes rouges et n cartes noires, cette probabilité est :

$$\frac{r}{r+n} \times \frac{n}{r+n-1} + \frac{n}{r+n} \times \frac{r}{r+n-1} = \frac{2rn}{(r+n)(r+n-1)}.$$

Avec un jeu de 32 cartes (16 R, 16 N), cela donne $2 \times 16 \times 16 / (32 \times 31) = 51,61\%$, ce qui est plutôt satisfaisant !

« EN GARDER DEUX DE LA MÊME COULEUR »

Envisageons maintenant des variantes dont l'analyse complète est encore possible. Pour la variante « En garder deux de la même couleur », les règles sont les mêmes, mais le but est d'arriver à avoir exactement deux >



HISTOIRE DES SOLITAIRES ET PATIENCES

Le jeu de plateau dénommé *Solitaire* existe depuis au moins trois siècles et se joue seul. Il consiste à faire disparaître tous les pions sauf un d'un damier (souvent en forme de croix) en les « sautant » les uns après les autres comme au jeu de dames.

En 1697, il est décrit et étudié dans la revue *Le Mercure Galant* (devenu plus tard *Le Mercure de France*), où il est introduit par les phrases : « Le jeu appelé du Solitaire est tellement à la mode, que vous & vos Amies, vous ne serez pas fâchées d'en avoir des règles certaines. [...] De quelque pays que soit cet étranger, il a Esté bien reçu en France, où il vient d'arriver. Il plaist à la Cour, à Paris, & dans la Province ; on le veut avoir partout. » Le jeu a été étudié par Gottfried Leibniz, Martin Gardner, Nicolaas De Bruijn, John Conway et bien d'autres (voir par exemple l'article de Christopher Jefferson et al. cité dans la bibliographie).

Dans une lettre au mathématicien Pierre Rémond de Montfort le 17 janvier 1716, Leibniz écrivait : « Après les jeux qui dépendent des nombres, viennent les jeux où entre encore la situation, comme dans le Trictrac, dans les Dames, et surtout dans les Échecs. Le jeu nommé le Solitaire me plaît assez. Je le pris d'une manière renversée, c'est-à-dire, au lieu de défaire un composé de pièces selon la loi de ce jeu,

qui est de sauter dans une place vide, et ôter la pièce sur laquelle on saute, j'ai cru qu'il serait plus beau de rétablir ce qui a esté défait, en remplissant un trou sur lequel on saute... » (voir l'article de Mary Sol de Mora-Charles cité dans la bibliographie).

Les jeux de cartes qu'on joue seul, dénommés « patiences », « solitaires » ou « réussites », existent semble-t-il seulement depuis la fin du XVIII^e siècle. En France, ils furent rendus populaires par le livre de la Marquise de Fortia, paru en 1842, *Le Livre des patiences* (publié sous le nom d'auteur Madame de F***). Il est téléchargeable sur : <https://gallica.bnf.fr>

La plus célèbre des patiences est sans doute *Klondike*, qui, aujourd'hui, est proposée pour téléphone ou ordinateur. Bien qu'ayant donné lieu à de nombreuses études, la probabilité de gagner une partie n'est pas connue avec précision, ce qui a fait dire à Persi Diaconis, célèbre prestidigitateur et mathématicien américain, ami de Martin Gardner, que l'incapacité de calculer cette probabilité est un échec embarrassant des probabilités appliquées.

Dans le présent article, on envisage trois types de patiences avec des cartes. Elles sont toutes très simples et les règles ne prennent en compte que la couleur rouge ou noire des cartes.

> paquets de la même couleur à la fin des repliements. Voici le résultat. On peut gagner si et seulement si: «Il y a au moins une autre carte ayant la même couleur que la dernière, et la ligne ne se termine pas par plus de deux cartes de la même couleur».

Nous vous laissons le plaisir de découvrir la stratégie gagnante.

Dans le cas où il faut garder deux cartes de la même couleur, le calcul de la probabilité de gagner est encore assez simple. Pour ce faire, calculons d'abord la probabilité des mauvais cas. Il y en a de deux sortes.

(a) Il n'y a pas dans la ligne d'autres cartes de la même couleur que la dernière. Cela peut se produire de deux façons:

$R R \dots R N (a_1)$ ou $N N \dots N R (a_2)$.

(b) Il y a plus de deux cartes de la même couleur en fin de ligne, autrement dit la ligne est: $X X \dots X N N N (b_1)$ ou $X X \dots X R R R (b_2)$, où les X désignent des cartes R ou N .

Ces quatre situations (a_1, a_2, b_1, b_2) sont disjointes: il est impossible d'en avoir deux en même temps. Donc la probabilité des mauvais cas est la somme des probabilités de chacune de ces situations. On calcule la probabilité de chacune en considérant les cartes de la dernière à la première. En supposant que les lignes sont de longueur 10 et qu'il y a au moins 8 rouges et 8 noires dans le paquet de cartes utilisé, les probabilités sont les suivantes.

$(a_1): \frac{n}{n+r} \times \frac{r}{r+n-1} \times \frac{(r-1)}{(r+n-2)} \times \frac{(r-2)}{(r+n-3)} \times \dots \times \frac{(r-8)}{(r+n-9)}$.

(a_2) : même chose en inversant r et n .

$(b_1): \frac{n}{n+r} \times \frac{(n-1)}{(n+r-1)} \times \frac{(n-2)}{(n+r-2)}$.

(b_2) : même chose en inversant r et n .

Pour le jeu de 32 cartes, cela donne $70211/310151 = 0,22637390$. La probabilité de gagner en jouant bien est donc de 77,3626%. C'est trop facile!

«EN GARDER K DE LA MÊME COULEUR»

Nous maîtrisons maintenant bien les règles pour aborder la variante générale de cette patience. On se donne un entier K (par exemple choisi au hasard en lançant un dé) et une ligne de L cartes et on cherche à replier la ligne en K paquets de la même couleur. L'analyse va conduire à une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse arriver à K paquets de la même couleur. On note d'abord trois cas où il est évident qu'on ne peut pas réussir.

1) Si $K > L$, il est évidemment impossible de réussir.

2) Si $K \leq L$ et qu'il y a moins de K cartes ayant la même couleur que la dernière, il est impossible de réussir, car on ne pourra jamais avoir K paquets de la couleur de la dernière carte, qui est la seule envisageable.

3) Si la ligne se termine par plus de K cartes de la même couleur, il est impossible de réussir car on ne changera jamais ces paquets finaux, qui ne se réduiront donc pas.

Un petit travail de réflexion conduit alors à imaginer une stratégie qui, si l'on n'est pas dans l'un des trois cas impossibles, fait gagner à coup sûr (voir l'encadré 2).

La probabilité de gain devient plus compliquée à calculer. Pour faciliter le calcul, on suppose que le paquet de cartes est infini et qu'à chaque fois qu'on prend une carte, elle a 50% de

2

LA STRATÉGIE POUR « EN GARDER K DE LA MÊME COULEUR »

Règles. On aligne L cartes.

On peut déplacer un paquet sur son voisin de gauche s'il a une couleur différente.

On choisit un entier K (éventuellement avec un dé). On doit replier les L cartes en K paquets de la même couleur.

– Si $K > L$, c'est impossible.

– Si $K \leq L$, et qu'il y a moins de K cartes ayant la même couleur que la dernière, c'est impossible (car on ne pourra jamais avoir K paquets de la couleur de la dernière carte, qui est la seule envisageable). On suppose que les cartes de la même couleur les plus à droite sont au plus K , et qu'il y a en tout au moins K cartes de la même couleur que la carte plus à droite. Pour décrire plus facilement la stratégie, on suppose que la carte la plus à droite est noire.

Stratégie.

1) S'il n'y a qu'une carte rouge, on ne fait rien pour cette première étape. S'il y en a plusieurs, on élimine toutes les cartes rouges sauf celle située le plus à droite.

C'est possible en utilisant les cartes noires.

2) Avec la carte rouge restante, on élimine des cartes noires de façon qu'il en reste exactement K en tout. C'est possible car, à droite de la rouge gardée, les cartes noires sont au plus K , et il en reste à gauche suffisamment, puisqu'au total il y en avait au départ au moins K , et qu'on n'en a supprimé aucune pour l'instant.

3) On élimine la carte rouge qui reste.

Exemple avec $L = 12$ et $K = 3$. On ne fait apparaître

que la carte du dessus

de chaque paquet. Partons de :

$R N R N R N R N R N R N$.

L'objectif est d'aboutir à trois

cartes de la même couleur. Nécessairement, ce sera trois N .

1) Élimination des cartes rouges,

sauf la rouge la plus à droite :

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$