

> paquets de la même couleur à la fin des repliements. Voici le résultat. On peut gagner si et seulement si: «Il y a au moins une autre carte ayant la même couleur que la dernière, et la ligne ne se termine pas par plus de deux cartes de la même couleur».

Nous vous laissons le plaisir de découvrir la stratégie gagnante.

Dans le cas où il faut garder deux cartes de la même couleur, le calcul de la probabilité de gagner est encore assez simple. Pour ce faire, calculons d'abord la probabilité des mauvais cas. Il y en a de deux sortes.

(a) Il n'y a pas dans la ligne d'autres cartes de la même couleur que la dernière. Cela peut se produire de deux façons:

$R R \dots R N (a_1)$  ou  $N N \dots N R (a_2)$ .

(b) Il y a plus de deux cartes de la même couleur en fin de ligne, autrement dit la ligne est:  $X X \dots X N N N (b_1)$  ou  $X X \dots X R R R (b_2)$ , où les  $X$  désignent des cartes  $R$  ou  $N$ .

Ces quatre situations ( $a_1, a_2, b_1, b_2$ ) sont disjointes: il est impossible d'en avoir deux en même temps. Donc la probabilité des mauvais cas est la somme des probabilités de chacune de ces situations. On calcule la probabilité de chacune en considérant les cartes de la dernière à la première. En supposant que les lignes sont de longueur 10 et qu'il y a au moins 8 rouges et 8 noires dans le paquet de cartes utilisé, les probabilités sont les suivantes.

( $a_1$ ):  $\frac{n}{n+r} \times \frac{r}{r+n-1} \times \frac{(r-1)}{(r+n-2)} \times \frac{(r-2)}{(r+n-3)} \times \dots \times \frac{(r-8)}{(r+n-9)}$ .

( $a_2$ ): même chose en inversant  $r$  et  $n$ .

( $b_1$ ):  $\frac{n}{n+r} \times \frac{(n-1)}{(n+r-1)} \times \frac{(n-2)}{(n+r-2)}$ .

( $b_2$ ): même chose en inversant  $r$  et  $n$ .

Pour le jeu de 32 cartes, cela donne  $70211/310151 = 0,22637390$ . La probabilité de gagner en jouant bien est donc de 77,3626%. C'est trop facile!

### «EN GARDER K DE LA MÊME COULEUR»

Nous maîtrisons maintenant bien les règles pour aborder la variante générale de cette patience. On se donne un entier  $K$  (par exemple choisi au hasard en lançant un dé) et une ligne de  $L$  cartes et on cherche à replier la ligne en  $K$  paquets de la même couleur. L'analyse va conduire à une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse arriver à  $K$  paquets de la même couleur. On note d'abord trois cas où il est évident qu'on ne peut pas réussir.

1) Si  $K > L$ , il est évidemment impossible de réussir.

2) Si  $K \leq L$  et qu'il y a moins de  $K$  cartes ayant la même couleur que la dernière, il est impossible de réussir, car on ne pourra jamais avoir  $K$  paquets de la couleur de la dernière carte, qui est la seule envisageable.

3) Si la ligne se termine par plus de  $K$  cartes de la même couleur, il est impossible de réussir car on ne changera jamais ces paquets finaux, qui ne se réduiront donc pas.

Un petit travail de réflexion conduit alors à imaginer une stratégie qui, si l'on n'est pas dans l'un des trois cas impossibles, fait gagner à coup sûr (voir l'encadré 2).

La probabilité de gain devient plus compliquée à calculer. Pour faciliter le calcul, on suppose que le paquet de cartes est infini et qu'à chaque fois qu'on prend une carte, elle a 50% de

# 2

## LA STRATÉGIE POUR « EN GARDER K DE LA MÊME COULEUR »

**Règles.** On aligne  $L$  cartes.

On peut déplacer un paquet sur son voisin de gauche s'il a une couleur différente.

On choisit un entier  $K$  (éventuellement avec un dé).

On doit replier les  $L$  cartes en  $K$  paquets de la même couleur.

– Si  $K > L$ , c'est impossible.

– Si  $K \leq L$ , et qu'il y a moins de  $K$  cartes ayant la même couleur que la dernière, c'est impossible (car on ne pourra jamais avoir  $K$  paquets de la couleur de la dernière carte, qui est la seule envisageable). On suppose que les cartes de la même couleur les plus à droite sont au plus  $K$ , et qu'il y a en tout au moins  $K$  cartes de la même couleur que la carte plus à droite. Pour décrire plus facilement la stratégie, on suppose que la carte la plus à droite est noire.

**Stratégie.**

1) S'il n'y a qu'une carte rouge, on ne fait rien pour cette première étape. S'il y en a plusieurs, on élimine toutes les cartes rouges sauf celle située le plus à droite. C'est possible en utilisant les cartes noires. 2) Avec la carte rouge restante, on élimine des cartes noires de façon qu'il en reste exactement  $K$  en tout. C'est possible car, à droite de la rouge gardée, les cartes noires sont au plus  $K$ , et il en reste à gauche suffisamment, puisqu'au total il y en avait au départ au moins  $K$ , et qu'on n'en a supprimé aucune pour l'instant. 3) On élimine la carte rouge qui reste. **Exemple avec  $L = 12$  et  $K = 3$ .** On ne fait apparaître

que la carte du dessus

de chaque paquet. Partons de :

$R N R N R N R N R N$ .

L'objectif est d'aboutir à trois

cartes de la même couleur.

Nécessairement, ce sera trois  $N$ .

1) Élimination des cartes rouges,

sauf la rouge la plus à droite :

$R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N$

$N N N N N R N$

2) Élimination de toutes

les noires sauf trois grâce

à la carte rouge qui reste :

$N N N N N R N$

$N N N N R N$

$N N N R N$

$N N R N$

(3) Élimination de la carte

rouge :

$N N N$