

> paquets de la même couleur à la fin des repliements. Voici le résultat. On peut gagner si et seulement si: «Il y a au moins une autre carte ayant la même couleur que la dernière, et la ligne ne se termine pas par plus de deux cartes de la même couleur».

Nous vous laissons le plaisir de découvrir la stratégie gagnante.

Dans le cas où il faut garder deux cartes de la même couleur, le calcul de la probabilité de gagner est encore assez simple. Pour ce faire, calculons d'abord la probabilité des mauvais cas. Il y en a de deux sortes.

(a) Il n'y a pas dans la ligne d'autres cartes de la même couleur que la dernière. Cela peut se produire de deux façons:

$R R \dots R N (a_1)$ ou $N N \dots N R (a_2)$.

(b) Il y a plus de deux cartes de la même couleur en fin de ligne, autrement dit la ligne est: $X X \dots X N N N (b_1)$ ou $X X \dots X R R R (b_2)$, où les X désignent des cartes R ou N .

Ces quatre situations (a_1, a_2, b_1, b_2) sont disjointes: il est impossible d'en avoir deux en même temps. Donc la probabilité des mauvais cas est la somme des probabilités de chacune de ces situations. On calcule la probabilité de chacune en considérant les cartes de la dernière à la première. En supposant que les lignes sont de longueur 10 et qu'il y a au moins 8 rouges et 8 noires dans le paquet de cartes utilisé, les probabilités sont les suivantes.

(a_1): $\frac{n}{n+r} \times \frac{r}{r+n-1} \times \frac{(r-1)}{(r+n-2)} \times \frac{(r-2)}{(r+n-3)} \times \dots \times \frac{(r-8)}{(r+n-9)}$.

(a_2): même chose en inversant r et n .

(b_1): $\frac{n}{n+r} \times \frac{(n-1)}{(n+r-1)} \times \frac{(n-2)}{(n+r-2)}$.

(b_2): même chose en inversant r et n .

Pour le jeu de 32 cartes, cela donne $70211/310151 = 0,22637390$. La probabilité de gagner en jouant bien est donc de 77,3626%. C'est trop facile!

«EN GARDER K DE LA MÊME COULEUR»

Nous maîtrisons maintenant bien les règles pour aborder la variante générale de cette patience. On se donne un entier K (par exemple choisi au hasard en lançant un dé) et une ligne de L cartes et on cherche à replier la ligne en K paquets de la même couleur. L'analyse va conduire à une condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse arriver à K paquets de la même couleur. On note d'abord trois cas où il est évident qu'on ne peut pas réussir.

1) Si $K > L$, il est évidemment impossible de réussir.

2) Si $K \leq L$ et qu'il y a moins de K cartes ayant la même couleur que la dernière, il est impossible de réussir, car on ne pourra jamais avoir K paquets de la couleur de la dernière carte, qui est la seule envisageable.

3) Si la ligne se termine par plus de K cartes de la même couleur, il est impossible de réussir car on ne changera jamais ces paquets finaux, qui ne se réduiront donc pas.

Un petit travail de réflexion conduit alors à imaginer une stratégie qui, si l'on n'est pas dans l'un des trois cas impossibles, fait gagner à coup sûr (voir l'encadré 2).

La probabilité de gain devient plus compliquée à calculer. Pour faciliter le calcul, on suppose que le paquet de cartes est infini et qu'à chaque fois qu'on prend une carte, elle a 50% de

2

LA STRATÉGIE POUR « EN GARDER K DE LA MÊME COULEUR »

Règles. On aligne L cartes.

On peut déplacer un paquet sur son voisin de gauche s'il a une couleur différente.

On choisit un entier K (éventuellement avec un dé).

On doit replier les L cartes en K paquets de la même couleur.

– Si $K > L$, c'est impossible.

– Si $K \leq L$, et qu'il y a moins de K cartes ayant la même couleur que la dernière, c'est impossible (car on ne pourra jamais avoir K paquets de la couleur de la dernière carte, qui est la seule envisageable).

On suppose que les cartes de la même couleur les plus à droite sont au plus K , et qu'il y a en tout au moins K cartes de la même couleur que la carte plus à droite. Pour décrire plus facilement la stratégie, on suppose que la carte la plus à droite est noire.

Stratégie.

1) S'il n'y a qu'une carte rouge, on ne fait rien pour cette première étape. S'il y en a plusieurs, on élimine toutes les cartes rouges sauf celle située le plus à droite.

C'est possible en utilisant les cartes noires.

2) Avec la carte rouge restante, on élimine des cartes noires de façon qu'il en reste exactement K en tout. C'est possible car, à droite de la rouge gardée, les cartes noires sont au plus K , et il en reste à gauche suffisamment, puisqu'au total il y en avait au départ au moins K , et qu'on n'en a supprimé aucune pour l'instant.

3) On élimine la carte rouge qui reste.

Exemple avec $L = 12$ et $K = 3$. On ne fait apparaître

que la carte du dessus

de chaque paquet. Partons de :

$R N R N R N R N R N R N$.

L'objectif est d'aboutir à trois

cartes de la même couleur.

Nécessairement, ce sera trois N .

1) Élimination des cartes rouges,

sauf la rouge la plus à droite :

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$R N R N R N R N R N R N$

$N N N N N R N$

2) Élimination de toutes

les noires sauf trois grâce

à la carte rouge qui reste :

$N N N N N R N$

$N N N N R N$

$N N N R N$

$N N R N$

(3) Élimination de la carte

rouge :

$N N N$

chances d'être rouge et 50% de chances d'être noire, ce qui revient au même que de supposer que les couleurs des cartes de la ligne initiale sont tirées R ou N à l'aide d'une pièce de monnaie (pile = R, face = N).

Voici les résultats du calcul, que nous ne détaillons pas, avec une ligne de 10 cartes au départ. On remarquera que les résultats pour $K=1$ et $K=2$ ne sont pas exactement ceux qu'on a trouvés plus haut, mais qu'ils en diffèrent très peu. C'est normal, car omettre de prendre en compte la légère variation des probabilités due à l'absence des cartes déposées ne change pas grand-chose.

La probabilité P de pouvoir arriver à K paquets (c'est-à-dire de ne pas se trouver dans l'un des trois cas impossibles) est:

$K=1 \rightarrow P=1/2=0,5$ $K=2 \rightarrow P=383/512=0,7480...$
 $K=3 \rightarrow P=219/256=0,8554...$ $K=4 \rightarrow P=217/256=0,8476...$
 $K=5 \rightarrow P=183/256=0,7148$ $K=6 \rightarrow P=31/64=0,4843...$
 $K=7 \rightarrow P=63/256=0,2460...$ $K=8 \rightarrow P=11/128=0,0859...$
 $K=9 \rightarrow P=9/512=0,017578...$ $K=10 \rightarrow P=1/512=0,001953...$

On voit que la probabilité de gagner (en utilisant la bonne stratégie) est maximale pour $K=3$. Si l'on vous demande quelle valeur de K vous allez chercher à atteindre, il faut donc répondre 3. Si le K est choisi au hasard avec un dé, la probabilité de réussir pour celui qui applique la stratégie optimale est la moyenne des six premières probabilités, qui est égale à 0,6917.

LA RÉUSSITE «TOUT DÉBARRASSER»

Venons-en à un second exemple un peu plus coriace. Il s'agit d'une patience déterministe n'utilisant que le rouge et le noir. Là encore, malgré sa simplicité apparente, le calcul de la probabilité de gagner semble contraindre à utiliser l'ordinateur ou à mener des raisonnements délicats.

On utilise un paquet de L cartes contenant un nombre pair de cartes rouges et un nombre pair de cartes noires. On prend les cartes une à une sur le dessus du paquet qu'on tient en main, les faces vers le dessous. On constitue deux paquets de cartes sur la table devant soi, l'un à gauche, l'un à droite. Si les deux paquets ont le même nombre de cartes ou si celui de gauche a moins de cartes que celui de droite, la nouvelle carte va à gauche, sinon elle va à droite. Après chaque nouvelle carte posée, on regarde si les cartes du dessus des deux paquets sont de la même couleur; si c'est le cas, on les enlève. On regarde à nouveau si les cartes du dessus des paquets sont de la même couleur; si c'est le cas on les enlève, etc. Quand on ne peut plus rien enlever, on prend la carte du dessus du paquet qu'on tient en main et on la pose sur l'un des deux paquets comme indiqué plus haut.

Le but est que les deux paquets soient vides une fois posée la dernière carte du paquet qu'on tient en main et opérés les retraits qu'elle permet (voir l'exemple de l'encadré 3).

En pratiquant la réussite, on comprend et on démontre que la réussite «Tout débarrasser» est équivalente à la suivante, plus simple mais qui exige une surface plus grande pour poser les cartes: (a) étaler en ligne les L cartes sur la table de gauche à droite; (b) tant que c'est possible, enlever une paire de cartes de la même couleur côte à côte et rapprocher les cartes qui restent alors sur la ligne (cela sans s'occuper de l'ordre des retraits). On gagne s'il ne reste plus rien.

Cette remarque mène à la conclusion pas tout à fait évidente qu'un paquet de cartes conduit à gagner si et seulement si le même paquet utilisé à l'envers permet de gagner. On démontre aussi que si un paquet de cartes permet de gagner, tous les paquets de cartes obtenus en coupant P (on sépare n'importe où le paquet en deux et on échange la partie en dessous avec celle au-dessus) permettent aussi de gagner (voir la propriété (E) de l'encadré 3).

La réussite peut s'envisager avec n'importe quel jeu de cartes, pourvu qu'il comporte un nombre pair de cartes rouges et un nombre pair de cartes noires. On envisagera par exemple la réussite «Tout débarrasser» avec 2 cartes noires et 2 cartes rouges que nous noterons TD-2, ou avec 4 cartes noires et 4 cartes rouges que nous noterons TD-4, etc. La réussite étant déterministe, aucune stratégie n'est à rechercher; en revanche, le calcul de la probabilité de gagner est un défi. Un premier calcul consiste à engendrer toutes les configurations possibles, à les jouer et à compter combien de fois on gagne. L'ordinateur bien évidemment fait le travail!

	Nombre de configurations de départ	Nombre de configurations gagnantes	Probabilité de gagner
TD-2	6	4	66,66%
TD-4	70	36	51,42%
TD-6	924	400	43,29%
TD-8	12870	4900	38,07%
TD-10	184756	63504	34,37%

Les énumérations deviennent trop longues pour aller plus loin, du moins avec mon programme et mon ordinateur. En utilisant l'encyclopédie en ligne des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org>) et en l'interrogeant sur la suite (4, 36, 400, 4900) calculée par l'ordinateur, le site internet indique qu'il pourrait s'agir de la suite $[C(2n, n)]^2$, où les $C(p, q) = p! / [(p-q)!q!]$ désignent les coefficients du binôme de Newton. Le nombre suivant donné par l'encyclopédie est 63504; il correspond à celui que nous avons calculé. Il est difficile d'imaginer que c'est par hasard.

Pour tester cette formule, nous avons donc procédé à une seconde évaluation en procédant par simulation répétée. En opérant 100 000 tirages au sort de configurations initiales pour chaque longueur de paquet de cartes, nous avons évalué la probabilité de >