

chances d'être rouge et 50% de chances d'être noire, ce qui revient au même que de supposer que les couleurs des cartes de la ligne initiale sont tirées R ou N à l'aide d'une pièce de monnaie (pile = R, face = N).

Voici les résultats du calcul, que nous ne détaillons pas, avec une ligne de 10 cartes au départ. On remarquera que les résultats pour $K=1$ et $K=2$ ne sont pas exactement ceux qu'on a trouvés plus haut, mais qu'ils en diffèrent très peu. C'est normal, car omettre de prendre en compte la légère variation des probabilités due à l'absence des cartes déposées ne change pas grand-chose.

La probabilité P de pouvoir arriver à K paquets (c'est-à-dire de ne pas se trouver dans l'un des trois cas impossibles) est:

$K=1 \rightarrow P=1/2=0,5$ $K=2 \rightarrow P=383/512=0,7480...$
 $K=3 \rightarrow P=219/256=0,8554...$ $K=4 \rightarrow P=217/256=0,8476...$
 $K=5 \rightarrow P=183/256=0,7148$ $K=6 \rightarrow P=31/64=0,4843...$
 $K=7 \rightarrow P=63/256=0,2460...$ $K=8 \rightarrow P=11/128=0,0859...$
 $K=9 \rightarrow P=9/512=0,017578...$ $K=10 \rightarrow P=1/512=0,001953...$

On voit que la probabilité de gagner (en utilisant la bonne stratégie) est maximale pour $K=3$. Si l'on vous demande quelle valeur de K vous allez chercher à atteindre, il faut donc répondre 3. Si le K est choisi au hasard avec un dé, la probabilité de réussir pour celui qui applique la stratégie optimale est la moyenne des six premières probabilités, qui est égale à 0,6917.

LA RÉUSSITE «TOUT DÉBARRASSER»

Venons-en à un second exemple un peu plus coriace. Il s'agit d'une patience déterministe n'utilisant que le rouge et le noir. Là encore, malgré sa simplicité apparente, le calcul de la probabilité de gagner semble contraindre à utiliser l'ordinateur ou à mener des raisonnements délicats.

On utilise un paquet de L cartes contenant un nombre pair de cartes rouges et un nombre pair de cartes noires. On prend les cartes une à une sur le dessus du paquet qu'on tient en main, les faces vers le dessous. On constitue deux paquets de cartes sur la table devant soi, l'un à gauche, l'un à droite. Si les deux paquets ont le même nombre de cartes ou si celui de gauche a moins de cartes que celui de droite, la nouvelle carte va à gauche, sinon elle va à droite. Après chaque nouvelle carte posée, on regarde si les cartes du dessus des deux paquets sont de la même couleur; si c'est le cas, on les enlève. On regarde à nouveau si les cartes du dessus des paquets sont de la même couleur; si c'est le cas on les enlève, etc. Quand on ne peut plus rien enlever, on prend la carte du dessus du paquet qu'on tient en main et on la pose sur l'un des deux paquets comme indiqué plus haut.

Le but est que les deux paquets soient vides une fois posée la dernière carte du paquet qu'on tient en main et opérés les retraits qu'elle permet (voir l'exemple de l'encadré 3).

En pratiquant la réussite, on comprend et on démontre que la réussite «Tout débarrasser» est équivalente à la suivante, plus simple mais qui exige une surface plus grande pour poser les cartes: (a) étaler en ligne les L cartes sur la table de gauche à droite; (b) tant que c'est possible, enlever une paire de cartes de la même couleur côte à côte et rapprocher les cartes qui restent alors sur la ligne (cela sans s'occuper de l'ordre des retraits). On gagne s'il ne reste plus rien.

Cette remarque mène à la conclusion pas tout à fait évidente qu'un paquet de cartes conduit à gagner si et seulement si le même paquet utilisé à l'envers permet de gagner. On démontre aussi que si un paquet de cartes permet de gagner, tous les paquets de cartes obtenus en coupant P (on sépare n'importe où le paquet en deux et on échange la partie en dessous avec celle au-dessus) permettent aussi de gagner (voir la propriété (E) de l'encadré 3).

La réussite peut s'envisager avec n'importe quel jeu de cartes, pourvu qu'il comporte un nombre pair de cartes rouges et un nombre pair de cartes noires. On envisagera par exemple la réussite «Tout débarrasser» avec 2 cartes noires et 2 cartes rouges que nous noterons TD-2, ou avec 4 cartes noires et 4 cartes rouges que nous noterons TD-4, etc. La réussite étant déterministe, aucune stratégie n'est à rechercher; en revanche, le calcul de la probabilité de gagner est un défi. Un premier calcul consiste à engendrer toutes les configurations possibles, à les jouer et à compter combien de fois on gagne. L'ordinateur bien évidemment fait le travail!

	Nombre de configurations de départ	Nombre de configurations gagnantes	Probabilité de gagner
TD-2	6	4	66,66%
TD-4	70	36	51,42%
TD-6	924	400	43,29%
TD-8	12870	4900	38,07%
TD-10	184756	63504	34,37%

Les énumérations deviennent trop longues pour aller plus loin, du moins avec mon programme et mon ordinateur. En utilisant l'encyclopédie en ligne des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org>) et en l'interrogeant sur la suite (4, 36, 400, 4900) calculée par l'ordinateur, le site internet indique qu'il pourrait s'agir de la suite $[C(2n, n)]^2$, où les $C(p, q) = p! / [(p-q)!q!]$ désignent les coefficients du binôme de Newton. Le nombre suivant donné par l'encyclopédie est 63504; il correspond à celui que nous avons calculé. Il est difficile d'imaginer que c'est par hasard.

Pour tester cette formule, nous avons donc procédé à une seconde évaluation en procédant par simulation répétée. En opérant 100 000 tirages au sort de configurations initiales pour chaque longueur de paquet de cartes, nous avons évalué la probabilité de >

3

LA PATIENCE « TOUT DÉBARRASSER »

On tient en main un paquet de cartes, par exemple R/N/R/R/N/R/N/N, on prend les cartes une à une et on en fait deux paquets sur la table ; on commence toujours le paquet à gauche et on égalise la taille des paquets quand c'est nécessaire. Lorsque les cartes au sommet des paquets sont de la même couleur, on les enlève. Le but est d'obtenir deux paquets vides à la fin. Un exemple est donné en bas de l'encadré.

Cette patience est déterministe : une fois le paquet de cartes mélangé, il conduit à perdre ou gagner sans que cela dépende de la stratégie adoptée. En revanche, la question de la probabilité de gagner est un intéressant sujet de réflexion pour l'amateur mathématicien.

Voyons la solution complète de « Tout débarrasser ». Notons 0 pour une carte rouge et 1 pour une noire. Soient k et h deux entiers positifs. Considérons une suite S formée de $2k$ 0 et $2h$ 1. Nous dirons qu'elle est « débarrassable » si l'on gagne la réussite avec cette suite.

Propriété 1. S est débarrassable si on peut la vider en enlevant, sans aucun ordre particulier, des paires de 0 consécutifs

et des paires de 1 consécutifs, comme dans l'exemple : 01001110 → 011110 → 0110 → 00 → Vide.

Démonstration. Si on peut vider la suite dans un certain ordre, on peut la vider en s'imposant de supprimer la paire la plus à gauche quand on a des choix, ce qui correspond à l'application des règles de la réussite « Tout débarrasser ». En effet, une paire qu'on peut enlever reste toujours enlevable si on en enlève d'autres avant.

Propriété 2. S est débarrassable si et seulement si la propriété (E) suivante est vérifiée :

« La moitié des 0 occupent des places de numéro pair et l'autre moitié des 0 occupent des places de numéro impair. » Notons que la propriété (E) avec 0 implique la propriété (E) avec 1 et réciproquement.

Exemple d'une suite vérifiant (E) : 0 1 0 0 1 1 1 0. Il y a en effet deux 0 en position paire (les positions 0 et 2, en rouge) et deux 0 en position impaire (les positions 3 et 7, en bleu).

Démonstration.

a) Si S est débarrassable, alors S vérifie (E). Lorsqu'on enlève une paire de 0 (respectivement de 1), on enlève toujours un 0

(resp. un 1) en position paire et un 0 (resp. un 1) en position impaire, puisque les positions occupées sont consécutives. Quand on resserre la suite pour boucher un trou qu'on vient de faire en enlevant une paire, on ne change pas la parité des éléments de la suite : ceux en position paire le restent, et de même pour ceux en position impaire. Il en résulte qu'à chaque étape on enlève un 0 (resp. un 1) en position paire et un 0 (resp. un 1) en position impaire. Au total donc, si on peut vider la suite, c'est qu'elle vérifie la propriété (E) pour les 0 et pour les 1.

b) Si S vérifie (E), alors S est débarrassable. Si S vérifie (E) alors elle contient au moins une paire de 0 consécutifs, ou une paire de 1 consécutifs. En effet : si S ne contient ni paire de 0 consécutifs, ni paire de 1 consécutifs, c'est que les 0 et les 1 alternent, et donc que les positions des 0 ont toutes la même parité et donc que (E) n'est pas vérifiée.

On remarque ensuite que si une suite vérifie (E) et qu'on lui enlève une paire de 0 consécutifs, ou une paire de 1 consécutifs, alors la nouvelle suite après avoir ressermé ses éléments vérifie encore la propriété (E). Il en résulte de proche en proche que si S vérifie (E), alors S est débarrassable.

Propriété 3.

a) Il y a $C(2k + 2h, 2k)$ suites possibles de $2k$ 0 et $2h$ 1, où les $C(p, q) = p! / [(p - q)! q!]$ sont les coefficients du binôme de Newton.

b) Parmi ces suites, il y en a $[C(k + h, k)]^2$ qui sont débarrassables.

Démonstration.

a) Déterminer une suite S formée de $2k$ 0 et $2h$ 1, c'est choisir $2k$ emplacements pour les 0, ce qui revient à choisir $2k$ éléments dans un ensemble de $2k + 2h$ éléments. Or $C(p, q)$ est le nombre de façons de choisir q éléments dans un ensemble de p éléments, d'où le résultat.

b) Choisir une suite qui vérifie (E), c'est : 1) choisir les k places paires où l'on met les 0, soit $C(k + h, k)$ choix possibles ; 2) choisir les k places impaires où l'on met des 1, soit également $C(k + h, k)$ choix possibles. Les deux choix sont indépendants, d'où le résultat.

