

3

LA PATIENCE « TOUT DÉBARRASSER »

On tient en main un paquet de cartes, par exemple R/N/R/R/N/R/N/N, on prend les cartes une à une et on en fait deux paquets sur la table ; on commence toujours le paquet à gauche et on égalise la taille des paquets quand c'est nécessaire. Lorsque les cartes au sommet des paquets sont de la même couleur, on les enlève. Le but est d'obtenir deux paquets vides à la fin. Un exemple est donné en bas de l'encadré.

Cette patience est déterministe : une fois le paquet de cartes mélangé, il conduit à perdre ou gagner sans que cela dépende de la stratégie adoptée. En revanche, la question de la probabilité de gagner est un intéressant sujet de réflexion pour l'amateur mathématicien.

Voyons la solution complète de « Tout débarrasser ». Notons 0 pour une carte rouge et 1 pour une noire. Soient k et h deux entiers positifs. Considérons une suite S formée de $2k$ 0 et $2h$ 1. Nous dirons qu'elle est « débarrassable » si l'on gagne la réussite avec cette suite.

Propriété 1. S est débarrassable si on peut la vider en enlevant, sans aucun ordre particulier, des paires de 0 consécutifs

et des paires de 1 consécutifs, comme dans l'exemple :

01001110 → 011110 → 0110 → 00 → Vide.

Démonstration. Si on peut vider la suite dans un certain ordre, on peut la vider en s'imposant de supprimer la paire la plus à gauche quand on a des choix, ce qui correspond à l'application des règles de la réussite « Tout débarrasser ». En effet, une paire qu'on peut enlever reste toujours enlevable si on en enlève d'autres avant.

Propriété 2. S est débarrassable si et seulement si la propriété (E) suivante est vérifiée :

« La moitié des 0 occupent des places de numéro pair et l'autre moitié des 0 occupent des places de numéro impair. » Notons que la propriété (E) avec 0 implique la propriété (E) avec 1 et réciproquement.

Exemple d'une suite vérifiant (E) : 0 1 0 0 1 1 1 0. Il y a en effet deux 0 en position paire (les positions 0 et 2, en rouge) et deux 0 en position impaire (les positions 3 et 7, en bleu).

Démonstration.

a) Si S est débarrassable, alors S vérifie (E). Lorsqu'on enlève une paire de 0 (respectivement de 1), on enlève toujours un 0

(resp. un 1) en position paire et un 0 (resp. un 1) en position impaire, puisque les positions occupées sont consécutives. Quand on resserre la suite pour boucher un trou qu'on vient de faire en enlevant une paire, on ne change pas la parité des éléments de la suite : ceux en position paire le restent, et de même pour ceux en position impaire. Il en résulte qu'à chaque étape on enlève un 0 (resp. un 1) en position paire et un 0 (resp. un 1) en position impaire. Au total donc, si on peut vider la suite, c'est qu'elle vérifie la propriété (E) pour les 0 et pour les 1.

b) Si S vérifie (E), alors S est débarrassable. Si S vérifie (E) alors elle contient au moins une paire de 0 consécutifs, ou une paire de 1 consécutifs. En effet : si S ne contient ni paire de 0 consécutifs, ni paire de 1 consécutifs, c'est que les 0 et les 1 alternent, et donc que les positions des 0 ont toutes la même parité et donc que (E) n'est pas vérifiée.

On remarque ensuite que si une suite vérifie (E) et qu'on lui enlève une paire de 0 consécutifs, ou une paire de 1 consécutifs, alors la nouvelle suite après avoir ressermé ses éléments vérifie encore la propriété (E). Il en résulte de proche en proche que si S vérifie (E), alors S est débarrassable.

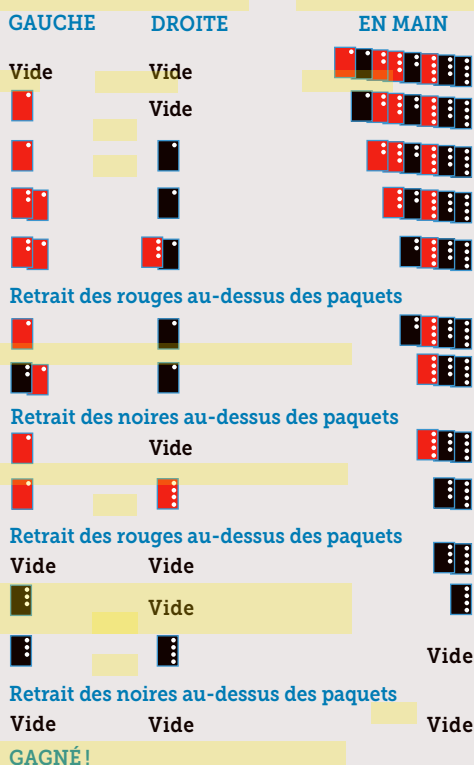
Propriété 3.

a) Il y a $C(2k + 2h, 2k)$ suites possibles de $2k$ 0 et $2h$ 1, où les $C(p, q) = p! / [(p - q)! q!]$ sont les coefficients du binôme de Newton.

b) Parmi ces suites, il y en a $[C(k + h, k)]^2$ qui sont débarrassables.

Démonstration.

a) Déterminer une suite S formée de $2k$ 0 et $2h$ 1, c'est choisir $2k$ emplacements pour les 0, ce qui revient à choisir $2k$ éléments dans un ensemble de $2k + 2h$ éléments. Or $C(p, q)$ est le nombre de façons de choisir q éléments dans un ensemble de p éléments, d'où le résultat. b) Choisir une suite qui vérifie (E), c'est : 1) choisir les k places paires où l'on met les 0, soit $C(k + h, k)$ choix possibles ; 2) choisir les k places impaires où l'on met des 1, soit également $C(k + h, k)$ choix possibles. Les deux choix sont indépendants, d'où le résultat.



> gagner pour TD-12, TD-14, ..., TD-26, que l'on a comparée au nombre donné par la suite de l'encyclopédie de Neil Sloane divisé par le nombre de configurations initiales possibles, qui est $C(4n, 2n)$ pour TD- $2n$.

	Probabilité de gagner (simulations)	Probabilité de gagner (formule)
TD-12	31,74%	31,57%
TD-14	29,34%	29,36%
TD-16	27,38%	27,55%
TD-18	26,18%	26,04%
TD-20	24,60%	24,76%
TD-22	23,50%	23,65%
TD-24	22,69%	22,67%
TD-26	22,03%	21,81%

Le tableau de probabilités obtenu expérimentalement correspond assez bien au tableau de probabilités provenant de la formule de l'encyclopédie de Sloane.

Partant de cette information, nous avons recherché une caractérisation des configurations gagnantes permettant d'arriver à la formule $[C(2n, n)]^2$. Nous avons pu la trouver et établir que le nombre de configurations gagnantes dans le cas de $2k$ cartes rouges et $2h$ cartes noires est $[C(k+h, h)]^2$, et par conséquent que la probabilité de gagner est $[C(k+h, h)]^2 / C(2k+2h, 2h)$ (voir l'encadré 3).

La patience «Tout débarrasser» est donc entièrement traitée et, grâce à la formule, vous pouvez savoir en fonction du paquet que vous utiliserez quelle est votre probabilité de gagner : avec un paquet de 32 cartes, vous gagnerez dans 27,55% des cas ; avec un paquet de 52 cartes, ce ne sera que 21,81%. On notera que dans cette étude, l'utilisation de l'encyclopédie des suites numériques a été déterminante. Il est probable que, sans l'utiliser, jamais je n'aurais pu établir le résultat général.

LA RÉUSSITE D'HERMIONE

Considérons maintenant une réussite en rouge en noir qui m'a été expliquée à Hermione (Ermioni), en Grèce. Elle semble intéressante car, bien que déterministe et très simple, il est difficile d'en comprendre toutes les propriétés et en particulier de calculer la probabilité de gagner autrement que par simulation informatique et évaluation statistique.

Cette patience n'exige pas de table, on pourra donc la pratiquer dans un bus ou en voiture. On tient le jeu battu dans la main gauche et on fait passer les cartes deux par deux dans la main droite.

On met les deux cartes au-dessus si elles sont de la même couleur, sinon on les met sous le paquet en les laissant dans le même ordre. Petit à petit, le paquet passe de la main gauche à la main droite. Le nombre de paires de même couleur sur le dessus du paquet est la valeur

du paquet. Ce nombre est forcément pair. En effet, les cartes qui composent ces paires contiennent autant de rouges que de noires puisque c'est le cas du reste du paquet, ce qui oblige à un nombre pair de paires de la même couleur au-dessus du paquet. Avec un jeu de 32 cartes, ce nombre peut donc être 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ou 16.

Quand on a terminé une manipulation, on ne mélange pas le jeu, on prend la carte du dessus du paquet et on la place en dessous. On fait alors passer le paquet de la main droite à la main gauche, et on recommence la manipulation.

À la fin de chaque manipulation, on note la valeur du paquet obtenu. On trouve par exemple la suite de valeurs 6, 2, 6, 4, 8, 8, etc. On a gagné si l'on réussit à avoir une valeur supérieure à 8 (donc 10, 12, 14, 16).

On est tenté d'essayer longtemps, mais souvent on échoue, aucune valeur supérieure à 8 ne se produisant. On constate qu'on tombe aussi sur ce qui semble être un cycle de valeurs, par exemple 8, 6, 8, 6, ... Obtenir 14 semble difficile, et 16 encore plus ! Pourtant, c'est évidemment possible. Une simulation informatique avec 100 000 tentatives donne : 0 fois 0, 0 fois le 2, 133 fois le 4, 4 670 fois le 6, 36 830 fois le 8, 44 100 fois le 10, 13 081 fois le 12, 1 185 fois le 14, 1 fois le 16.

On a donc environ 58,3% de chances d'obtenir un paquet ayant une valeur 10 ou plus, 14,3% d'avoir 12 ou plus, 1,2% d'avoir 14 ou plus.

Quelques questions se posent. Quelle est la longueur du plus long cycle de résultats pour un jeu de 32 cartes ? Quelle est la plus longue attente avant d'entrer dans un cycle pour un jeu de 32 cartes ? Que se passe-t-il plus généralement pour des jeux de K cartes rouges et K cartes noires ? Pour la première question, on a une idée. Une série de nombreux essais semble montrer que quel que soit le paquet de K cartes rouges et K cartes noires, la manipulation finit inévitablement par tomber sur une suite constante de valeurs (par exemple 8, 8, 8...) ou sur un cycle d'ordre deux (par exemple 12, 10, 12, 10). Qui saura le démontrer ?

Il existe des dizaines de travaux mathématiques consacrés aux patiences et solitaires et il s'en publie encore régulièrement. Les patiences prenant en compte seulement les couleurs rouge et noire devraient être les plus simples, mais, finalement, ce n'est pas si sûr. Elles semblent une riche source de problèmes de tous niveaux. Le fait de ne manipuler que deux valeurs possibles pour les cartes intéressera les informaticiens, dont on sait qu'ils adorent le binaire ; mais, plus généralement, elles pourraient occuper mathématiciens et amateurs de programmation pour les longues journées de vacances pluvieuses ou... d'épidémie. ■

BIBLIOGRAPHIE

I. Gent et C. Blake, **Patience experimental results**, 2019 : <https://bit.ly/3ek8Y97>

C. Blake et I. P. Gent, **The winnability of Klondike solitaire and many other patience games**, prépublication, 2019 : <https://arxiv.org/abs/1906.12314>

A. Tung, **A brief history of Solitaire, Patience, and other card games for one**, *The Week*, 2015 : <https://bit.ly/30qE9HQ>

C. Jefferson et al., **Modelling and solving English Peg Solitaire**, *Computers & Operations Research*, vol. 33(10), pp. 2935-2959, 2006.

X. Yan et al., **Solitaire : Man versus machine**, *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol. 17, pp. 1553-1560, 2005.

E. Berlekamp et al., **Purging pegs properly, Winning Ways for Your Mathematical Plays** (2^e éd.), vol. 4, pp. 803-841, A K Peters, 2004.

S. de Mora-Charles, **Quelques jeux de hasard selon Leibniz**, *Historia Mathematica*, vol. 19, pp. 125-157, 1992.