

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

DES POINTS QUI S'ALIGNENT... OU PAS

Les alignements possibles d'un ensemble fini de points du plan posent de redoutables et délicieux problèmes.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)

P

ar deux points distincts passe une droite unique, comme chacun sait. Intéressons-nous ici aux alignements de trois points, ou plus. Une série de problèmes géométriques apparemment simples se posent naturellement à ce sujet et certains sont d'une subtilité inattendue et mobilisent des raisonnements impliquant des théories mathématiques variées. Ils ont été récemment l'occasion de progrès dus au génie des mathématiciens qui s'y sont intéressés ou à la mise au point de puissants programmes de calcul.

JAMAIS MOINS DE TROIS POINTS PAR ALIGNEMENT

Commençons par un problème qu'il est amusant de résoudre seul avec du papier et un crayon. Le problème fut posé en 1893 par le mathématicien anglais James Sylvester dans le journal *Educational Times*: montrer que pour un ensemble fini E de points du plan, soit tous les points sont alignés, soit il existe deux points tels que la droite qu'ils définissent ne rencontre aucun autre point de E .

Une solution fut rapidement proposée, mais elle était incomplète; la première solution correcte publiée est due au mathématicien allemand Eberhard Melchior, en 1941. Les vicissitudes de l'histoire ont eu pour conséquence que sa solution a été dans un premier temps ignorée. Melchior publia en effet son résultat dans une revue qui, soumise à l'idéologie nazie, n'acceptait que des articles rédigés par des

Aryens... ce qui avait pour conséquence qu'elle était peu diffusée hors d'Allemagne.

En 1943, sans connaître ni la question de Sylvester ni la solution de Melchior, le Hongrois Paul Erdős redécouvrit seul le problème. Il raconta plus tard: «Je m'attendais à ce que ce soit facile, mais à ma grande surprise et fort déçu, je n'ai pas su trouver de démonstration. J'ai indiqué le problème à Tibor Gallai qui, lui, a très vite découvert une ingénieuse solution.»

La preuve du mathématicien hongrois Tibor Gallai fut publiée en 1944 et le résultat porte aujourd'hui le nom de «théorème de Sylvester-Gallai». On a trouvé depuis des solutions assez courtes et compréhensibles par tout le monde; l'encadré 1 en présente une de quelques lignes proposée en 1958 par le mathématicien américain Leroy Kelly. Le sujet a dès lors suscité un immense intérêt. D'autres démonstrations ont été conçues, des variantes ont été envisagées, et toutes sortes de généralisations étudiées.

Pour parler commodément de ces problèmes, on convient que les droites définies par deux points de l'ensemble fini E de points du plan et ne contenant pas de troisième point de E seront dénommées «droites ordinaires» de E . Avec ce vocabulaire, le théorème de Sylvester-Gallai signifie que tout ensemble fini E de points non colinéaires du plan détermine au moins une droite ordinaire de E .

Une fois résolu le problème de Sylvester, une question vient naturellement à l'esprit: est-il



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).