

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

DES POINTS QUI S'ALIGNENT... OU PAS

Les alignements possibles d'un ensemble fini de points du plan posent de redoutables et délicieux problèmes.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)

P

ar deux points distincts passe une droite unique, comme chacun sait. Intéressons-nous ici aux alignements de trois points, ou plus. Une série de problèmes géométriques apparemment simples se posent naturellement à ce sujet et certains sont d'une subtilité inattendue et mobilisent des raisonnements impliquant des théories mathématiques variées. Ils ont été récemment l'occasion de progrès dus au génie des mathématiciens qui s'y sont intéressés ou à la mise au point de puissants programmes de calcul.

JAMAIS MOINS DE TROIS POINTS PAR ALIGNEMENT

Commençons par un problème qu'il est amusant de résoudre seul avec du papier et un crayon. Le problème fut posé en 1893 par le mathématicien anglais James Sylvester dans le journal *Educational Times*: montrer que pour un ensemble fini E de points du plan, soit tous les points sont alignés, soit il existe deux points tels que la droite qu'ils définissent ne rencontre aucun autre point de E .

Une solution fut rapidement proposée, mais elle était incomplète; la première solution correcte publiée est due au mathématicien allemand Eberhard Melchior, en 1941. Les vicissitudes de l'histoire ont eu pour conséquence que sa solution a été dans un premier temps ignorée. Melchior publia en effet son résultat dans une revue qui, soumise à l'idéologie nazie, n'acceptait que des articles rédigés par des

Aryens... ce qui avait pour conséquence qu'elle était peu diffusée hors d'Allemagne.

En 1943, sans connaître ni la question de Sylvester ni la solution de Melchior, le Hongrois Paul Erdős redécouvrit seul le problème. Il raconta plus tard: «Je m'attendais à ce que ce soit facile, mais à ma grande surprise et fort déçu, je n'ai pas su trouver de démonstration. J'ai indiqué le problème à Tibor Gallai qui, lui, a très vite découvert une ingénieuse solution.»

La preuve du mathématicien hongrois Tibor Gallai fut publiée en 1944 et le résultat porte aujourd'hui le nom de «théorème de Sylvester-Gallai». On a trouvé depuis des solutions assez courtes et compréhensibles par tout le monde; l'encadré 1 en présente une de quelques lignes proposée en 1958 par le mathématicien américain Leroy Kelly. Le sujet a dès lors suscité un immense intérêt. D'autres démonstrations ont été conçues, des variantes ont été envisagées, et toutes sortes de généralisations étudiées.

Pour parler commodément de ces problèmes, on convient que les droites définies par deux points de l'ensemble fini E de points du plan et ne contenant pas de troisième point de E seront dénommées «droites ordinaires» de E . Avec ce vocabulaire, le théorème de Sylvester-Gallai signifie que tout ensemble fini E de points non colinéaires du plan détermine au moins une droite ordinaire de E .

Une fois résolu le problème de Sylvester, une question vient naturellement à l'esprit: est-il



Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

THÉORÈME DE SYLVESTER-GALLAI : LA DÉMONSTRATION DE LEROY KELLY

Théorème de Sylvester-Gallai

Soit E un ensemble fini de points du plan, alors soit (i) tous les points sont alignés, soit (ii) il existe une droite qui contient exactement deux points de E .

Autrement dit : si tous les points d'un ensemble fini E de points du plan ne sont pas alignés, il est impossible que toutes les droites déterminées par deux points de E en rencontrent un troisième. Ou encore : si, à chaque couple A, B de points d'un ensemble fini E de points du plan, on peut en associer un troisième, C , différent de A et B tels que A, B et C soient alignés, alors c'est que tous les points de E sont alignés.

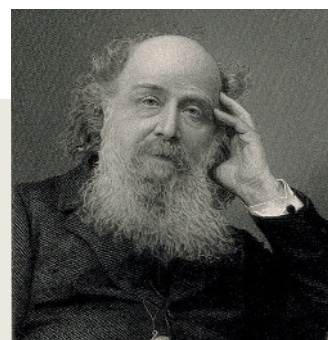
Démonstration

On suppose que les points de E ne sont pas alignés. Appelons « droite de E » toute droite qui

contient au moins deux points de E , et montrons qu'il en existe une, dénommée « droite ordinaire » de E , ne contenant pas de troisième point de E .

À chaque droite D de E , on associe la distance minimum entre D et les points de E extérieurs à D , qu'on note $\min(D)$. Il n'y a qu'un nombre fini de droites de E , donc l'une des valeurs $\min(D)$ est la plus petite possible. Soit la droite D_0 associée à cette plus petite valeur possible et soit P_0 le point de E dont la distance à D_0 vaut $\min(D_0)$. Par construction, la distance entre P_0 et D_0 est la plus petite possible entre une droite de E et un point de E n'y appartenant pas.

Supposons que D_0 contienne trois points différents A, B et C . Soit H le point d'intersection de D_0 avec la perpendiculaire à D_0

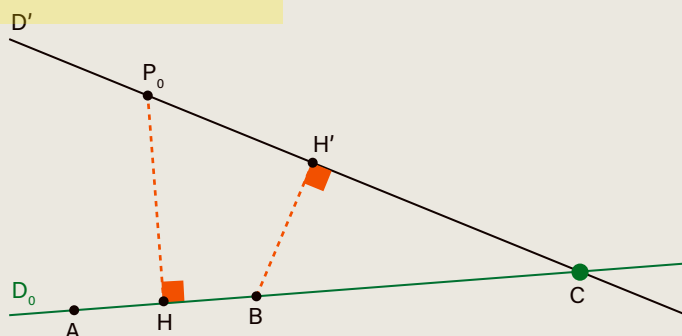


James Joseph Sylvester (1814-1897)

passant par P_0 . Deux des points A, B et C se trouvent d'un même côté de H . On peut supposer que ce sont B et C , et que C est celui qui est le plus éloigné de H .

Soit D' la droite de E qui passe par C et P_0 ; elle ne contient pas B (sinon, P_0 serait sur D_0). Soit H' l'intersection de la perpendiculaire à D' passant par B . Les triangles rectangles P_0HC et BCH' sont semblables, et BCH' est plus petit que P_0HC car l'hypoténuse de BCH' est incluse dans l'un des côtés de P_0HC . Il en résulte que BH' est strictement plus petit que P_0H . Par conséquent, la distance entre P_0 et D_0 n'est pas la plus petite possible entre une droite de E et un point de E n'y appartenant pas, contrairement à la définition de P_0 et D_0 .

En conclusion, il n'est pas possible que D_0 contienne trois points. Donc D_0 n'en contient que deux. C'est ce que nous voulions démontrer.



possible qu'un tel ensemble fini E ne détermine qu'une seule droite ordinaire? Et, s'il en détermine plusieurs, peut-on avoir une idée de leur nombre minimal, qui dépend sans doute du nombre n de points de E ?

Notons $\min_n$ le nombre minimum de droites ordinaires d'un ensemble E de n points non colinéaires du plan. L'article de Melchior ne démontrait pas seulement le théorème de Sylvester-Gallai, qui signifie $\min_n \geq 1$, mais établissait que $\min_n \geq 3$. En 1951, Theodore Motzkin (fils du leader sioniste Leo Motzkin : ce sujet mathématique est imprégné d'histoire!) démontra que $\min_n \geq n^{1/2}$. Le résultat fut amélioré en 1993 par les Canadiens Joseph Csimma et Eric Sawyer, qui prouvèrent que $\min_n \geq 6n/13$.

La mathématicien hongrois Gabriel Dirac (fils de la sœur d'Eugene Wigner, qui a épousé Paul Dirac) affirma alors qu'il était probable que $\min_n \geq n/2$. Cette affirmation, dénommée « conjecture de Dirac-Motzkin », est maintenant presque démontrée. En effet, Ben Green et Terence Tao ont établi en 2013 qu'il existe un n_0 tel que :

- si $n \geq n_0$ et si n est impair, alors $\min_n \geq 3 \lfloor n/4 \rfloor$ où $\lfloor k \rfloor$ désigne la partie entière de k , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à k ;
- si $n \geq n_0$ est pair, alors $\min_n \geq n/2$.

Pour que la conjecture soit complètement établie, il reste à vérifier qu'elle est vraie pour les $n \leq n_0$, c'est-à-dire pour un nombre fini de cas. Ce n'est qu'un travail fini, en théorie faisable avec un ordinateur... Malheureusement, étant donné ce qu'on sait de n_0 , le calcul à mener serait trop long.

On connaît une infinité de configurations de points où la borne $n/2$ est atteinte (voir l'encadré 2). Seules deux exceptions à l'affirmation que $\min_n \geq n/2$ sont connues. Elles correspondent à 7 points déterminant 3 droites ordinaires, et 13 points déterminant 6 droites ordinaires. Il est donc possible que le n_0 du théorème de Green et Tao soit l'entier 14.

RECHERCHE ALGORITHMIQUE

La démonstration expliquée dans l'encadré 1 revient à s'intéresser à la plus petite distance possible entre une droite déterminée par