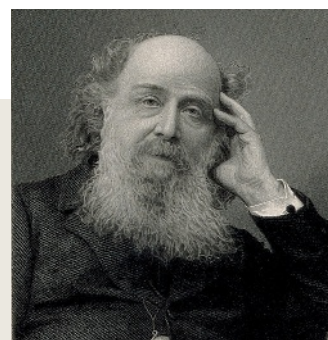


THÉORÈME DE SYLVESTER-GALLAI : LA DÉMONSTRATION DE LEROY KELLY



James Joseph Sylvester (1814-1897)

1

Théorème de Sylvester-Gallai

Soit E un ensemble fini de points du plan, alors soit (i) tous les points sont alignés, soit (ii) il existe une droite qui contient exactement deux points de E .

Autrement dit : si tous les points d'un ensemble fini E de points du plan ne sont pas alignés, il est impossible que toutes les droites déterminées par deux points de E en rencontrent un troisième. Ou encore : si, à chaque couple A, B de points d'un ensemble fini E de points du plan, on peut en associer un troisième, C , différent de A et B tels que A, B et C soient alignés, alors c'est que tous les points de E sont alignés.

Démonstration

On suppose que les points de E ne sont pas alignés. Appelons « droite de E » toute droite qui

contient au moins deux points de E , et montrons qu'il en existe une, dénommée « droite ordinaire » de E , ne contenant pas de troisième point de E .

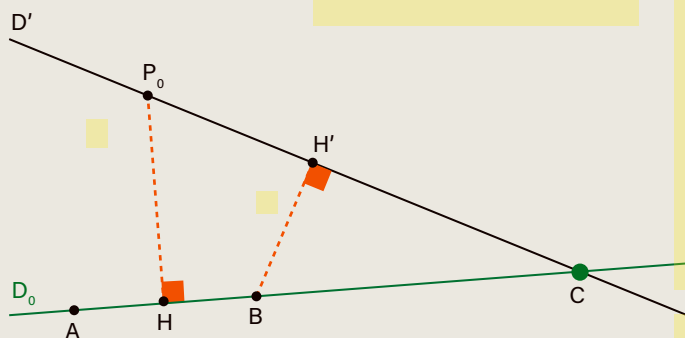
À chaque droite D de E , on associe la distance minimum entre D et les points de E extérieurs à D , qu'on note $\min(D)$. Il n'y a qu'un nombre fini de droites de E , donc l'une des valeurs $\min(D)$ est la plus petite possible. Soit la droite D_0 associée à cette plus petite valeur possible et soit P_0 le point de E dont la distance à D_0 vaut $\min(D_0)$. Par construction, la distance entre P_0 et D_0 est la plus petite possible entre une droite de E et un point de E n'y appartenant pas.

Supposons que D_0 contienne trois points différents A, B et C . Soit H le point d'intersection de D_0 avec la perpendiculaire à D_0

passant par P_0 . Deux des points A, B et C se trouvent d'un même côté de H . On peut supposer que ce sont B et C , et que C est celui qui est le plus éloigné de H .

Soit D' la droite de E qui passe par C et P_0 ; elle ne contient pas B (sinon, P_0 serait sur D_0). Soit H' l'intersection de la perpendiculaire à D' passant par B . Les triangles rectangles P_0HC et BCH' sont semblables, et BCH' est plus petit que P_0HC car l'hypoténuse de BCH' est incluse dans l'un des côtés de P_0HC . Il en résulte que BH' est strictement plus petit que P_0H . Par conséquent, la distance entre P_0 et D_0 n'est pas la plus petite possible entre une droite de E et un point de E n'y appartenant pas, contrairement à la définition de P_0 et D_0 .

En conclusion, il n'est pas possible que D_0 contienne trois points. Donc D_0 n'en contient que deux. C'est ce que nous voulions démontrer.



possible qu'un tel ensemble fini E ne détermine qu'une seule droite ordinaire? Et, s'il en détermine plusieurs, peut-on avoir une idée de leur nombre minimal, qui dépend sans doute du nombre n de points de E ?

Notons $\min_n$ le nombre minimum de droites ordinaires d'un ensemble E de n points non colinéaires du plan. L'article de Melchior ne démontrait pas seulement le théorème de Sylvester-Gallai, qui signifie $\min_n \geq 1$, mais établissait que $\min_n \geq 3$. En 1951, Theodore Motzkin (fils du leader sioniste Leo Motzkin : ce sujet mathématique est imprégné d'histoire!) démontra que $\min_n \geq n^{1/2}$. Le résultat fut amélioré en 1993 par les Canadiens Joseph Csima et Eric Sawyer, qui prouvèrent que $\min_n \geq 6n/13$.

La mathématicien hongrois Gabriel Dirac (fils de la sœur d'Eugene Wigner, qui a épousé Paul Dirac) affirma alors qu'il était probable que $\min_n \geq n/2$. Cette affirmation, dénommée « conjecture de Dirac-Motzkin », est maintenant presque démontrée. En effet, Ben Green et Terence Tao ont établi en 2013 qu'il existe un n_0 tel que :

- si $n \geq n_0$ et si n est impair, alors $\min_n \geq 3 \lfloor n/4 \rfloor$ où $\lfloor k \rfloor$ désigne la partie entière de k , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à k ;
- si $n \geq n_0$ est pair, alors $\min_n \geq n/2$.

Pour que la conjecture soit complètement établie, il reste à vérifier qu'elle est vraie pour les $n \leq n_0$, c'est-à-dire pour un nombre fini de cas. Ce n'est qu'un travail fini, en théorie faisable avec un ordinateur... Malheureusement, étant donné ce qu'on sait de n_0 , le calcul à mener serait trop long.

On connaît une infinité de configurations de points où la borne $n/2$ est atteinte (voir l'encadré 2). Seules deux exceptions à l'affirmation que $\min_n \geq n/2$ sont connues. Elles correspondent à 7 points déterminant 3 droites ordinaires, et 13 points déterminant 6 droites ordinaires. Il est donc possible que le n_0 du théorème de Green et Tao soit l'entier 14.

RECHERCHE ALGORITHMIQUE

La démonstration expliquée dans l'encadré 1 revient à s'intéresser à la plus petite distance possible entre une droite déterminée par