

THÉORÈME DE SYLVESTER-GALLAI : LA DÉMONSTRATION DE LEROY KELLY

1

Théorème de Sylvester-Gallai

Soit E un ensemble fini de points du plan, alors soit (i) tous les points sont alignés, soit (ii) il existe une droite qui contient exactement deux points de E .

Autrement dit : si tous les points d'un ensemble fini E de points du plan ne sont pas alignés, il est impossible que toutes les droites déterminées par deux points de E en rencontrent un troisième. Ou encore : si, à chaque couple A, B de points d'un ensemble fini E de points du plan, on peut en associer un troisième, C , différent de A et B tels que A, B et C soient alignés, alors c'est que tous les points de E sont alignés.

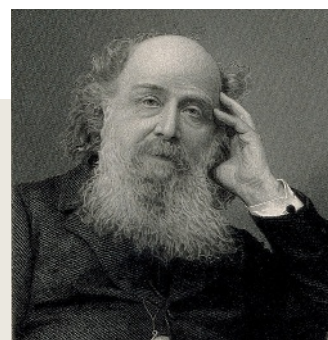
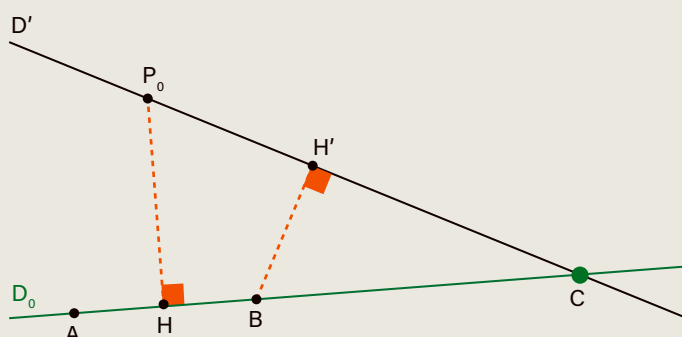
Démonstration

On suppose que les points de E ne sont pas alignés. Appelons « droite de E » toute droite qui

contient au moins deux points de E , et montrons qu'il en existe une, dénommée « droite ordinaire » de E , ne contenant pas de troisième point de E .

À chaque droite D de E , on associe la distance minimum entre D et les points de E extérieurs à D , qu'on note $\min(D)$. Il n'y a qu'un nombre fini de droites de E , donc l'une des valeurs $\min(D)$ est la plus petite possible. Soit la droite D_0 associée à cette plus petite valeur possible et soit P_0 le point de E dont la distance à D_0 vaut $\min(D_0)$. Par construction, la distance entre P_0 et D_0 est la plus petite possible entre une droite de E et un point de E n'y appartenant pas.

Supposons que D_0 contienne trois points différents A, B et C . Soit H le point d'intersection de D_0 avec la perpendiculaire à D_0



James Joseph Sylvester (1814-1897)

passant par P_0 . Deux des points A, B et C se trouvent d'un même côté de H . On peut supposer que ce sont B et C , et que C est celui qui est le plus éloigné de H .

Soit D' la droite de E qui passe par C et P_0 ; elle ne contient pas B (sinon, P_0 serait sur D_0). Soit H' l'intersection de la perpendiculaire à D' passant par B . Les triangles rectangles P_0HC et BCH' sont semblables, et BCH' est plus petit que P_0HC car l'hypoténuse de BCH' est incluse dans l'un des côtés de P_0HC . Il en résulte que BH' est strictement plus petit que P_0H . Par conséquent, la distance entre P_0 et D_0 n'est pas la plus petite possible entre une droite de E et un point de E n'y appartenant pas, contrairement à la définition de P_0 et D_0 .

En conclusion, il n'est pas possible que D_0 contienne trois points. Donc D_0 n'en contient que deux. C'est ce que nous voulions démontrer.

possible qu'un tel ensemble fini E ne détermine qu'une seule droite ordinaire? Et, s'il en détermine plusieurs, peut-on avoir une idée de leur nombre minimal, qui dépend sans doute du nombre n de points de E ?

Notons $\min_n$ le nombre minimum de droites ordinaires d'un ensemble E de n points non colinéaires du plan. L'article de Melchior ne démontrait pas seulement le théorème de Sylvester-Gallai, qui signifie $\min_n \geq 1$, mais établissait que $\min_n \geq 3$. En 1951, Theodore Motzkin (fils du leader sioniste Leo Motzkin : ce sujet mathématique est imprégné d'histoire!) démontra que $\min_n \geq n^{1/2}$. Le résultat fut amélioré en 1993 par les Canadiens Joseph Csimma et Eric Sawyer, qui prouvèrent que $\min_n \geq 6n/13$.

La mathématicien hongrois Gabriel Dirac (fils de la sœur d'Eugene Wigner, qui a épousé Paul Dirac) affirma alors qu'il était probable que $\min_n \geq n/2$. Cette affirmation, dénommée « conjecture de Dirac-Motzkin », est maintenant presque démontrée. En effet, Ben Green et Terence Tao ont établi en 2013 qu'il existe un n_0 tel que :

- si $n \geq n_0$ et si n est impair, alors $\min_n \geq 3 \lfloor n/4 \rfloor$ où $\lfloor k \rfloor$ désigne la partie entière de k , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à k ;
- si $n \geq n_0$ est pair, alors $\min_n \geq n/2$.

Pour que la conjecture soit complètement établie, il reste à vérifier qu'elle est vraie pour les $n \leq n_0$, c'est-à-dire pour un nombre fini de cas. Ce n'est qu'un travail fini, en théorie faisable avec un ordinateur... Malheureusement, étant donné ce qu'on sait de n_0 , le calcul à mener serait trop long.

On connaît une infinité de configurations de points où la borne $n/2$ est atteinte (voir l'encadré 2). Seules deux exceptions à l'affirmation que $\min_n \geq n/2$ sont connues. Elles correspondent à 7 points déterminant 3 droites ordinaires, et 13 points déterminant 6 droites ordinaires. Il est donc possible que le n_0 du théorème de Green et Tao soit l'entier 14.

RECHERCHE ALGORITHMIQUE

La démonstration expliquée dans l'encadré 1 revient à s'intéresser à la plus petite distance possible entre une droite déterminée par

2

POINTS À L'INFINI ET DUALITÉ

Les résultats démontrés par Ben Green et Terence Tao en 2013 indiquent en particulier que pour tout entier n dépassant un certain entier n_0 et tout ensemble E de n points non colinéaires, il existe au moins $\lfloor n/2 \rfloor$ droites passant exactement par deux points de E , droites dites « ordinaires » de E . La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

On ne connaît pour l'instant que deux exceptions à ce résultat, pour $n = 7$ et $n = 13$. Il se peut donc que $n_0 = 14$. Ces deux exceptions sont représentées sur les dessins A et B.

Pour la première, on voit 7 points (en rouge) qui créent seulement 3 droites ordinaires de E , en noir.

La seconde exception, avec 13 points et seulement 6 droites ordinaires, est représentée sur le schéma B en utilisant le plan projectif.

Le plan projectif est ce qu'on obtient à partir du plan ordinaire en ajoutant un point à l'infini pour chaque famille de droites parallèles : deux parallèles ont donc dans ce plan un point unique en commun. L'ensemble des points à l'infini définit une droite supplémentaire du plan. On démontre que toute configuration finie de points et de droites qu'on peut obtenir en utilisant ces points à l'infini a un équivalent sans les utiliser sur le plan ordinaire.

Le dessin B donne une représentation avec des parallèles et l'indication des points à l'infini utilisés. Il y a 13 points, dont 4 à l'infini, et seulement 6 droites ordinaires tracées en noir.

Le dessin C reprend le dessin B en plaçant les points et les droites sur un plan en perspective avec une ligne d'horizon qui correspond à l'ensemble des points à l'infini. Les quatre points à l'infini de la configuration B de 13 points sont maintenant

tous à distance finie sur la ligne d'horizon, même si A et D sont un peu trop à gauche et à droite pour qu'on les voie.

Le procédé pour ramener des points à l'infini du plan projectif à distance finie est général et son existence rend plus facile la recherche et la représentation des configurations qu'on rencontre au sujet des problèmes d'alignement de points.

Le dessin D utilise encore des points à l'infini. Il représente une configuration de 10 points, dont 5 à l'infini, n'engendrant que 5 droites ordinaires. La configuration due au mathématicien hongrois Károly Böröczky se généralise avec $2m$ points et m droites ordinaires. Elle montre que le résultat de Ben Green et Terence Tao est le meilleur possible : si n est pair, on ne peut pas prouver qu'il y a toujours plus de $n/2$ droites ordinaires pour n points non colinéaires.

Dans le plan projectif, il existe une dualité parfaite entre points et droites. L'affirmation « par deux points distincts passe une droite unique » devient par dualité « deux droites distinctes se rencontrent en un point unique ». Tout énoncé, et toute figure, concernant les points et les droites donne un énoncé dual et une figure duale où les mots « droite » et « point » sont échangés.

Ainsi, le théorème de Sylvester-Gallai qui s'énonce : « Tout ensemble fini E de points non colinéaires définit au moins une droite passant par seulement deux points de E » devient, par dualité : « Tout ensemble fini E de droites ne passant pas toutes par un même point définit au moins un point qui n'appartient qu'à deux droites de E ».

