

2

POINTS À L'INFINI ET DUALITÉ

Les résultats démontrés par Ben Green et Terence Tao en 2013 indiquent en particulier que pour tout entier n dépassant un certain entier n_0 , et tout ensemble E de n points non colinéaires, il existe au moins $\lfloor n/2 \rfloor$ droites passant exactement par deux points de E , droites dites « ordinaires » de E . La notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

On ne connaît pour l'instant que deux exceptions à ce résultat, pour $n = 7$ et $n = 13$. Il se peut donc que $n_0 = 14$. Ces deux exceptions sont représentées sur les dessins A et B.

Pour la première, on voit 7 points (en rouge) qui créent seulement 3 droites ordinaires de E , en noir.

La seconde exception, avec 13 points et seulement 6 droites ordinaires, est représentée sur le schéma B en utilisant le plan projectif.

Le plan projectif est ce qu'on obtient à partir du plan ordinaire en ajoutant un point à l'infini pour chaque famille de droites parallèles : deux parallèles ont donc dans ce plan un point unique en commun. L'ensemble des points à l'infini définit une droite supplémentaire du plan. On démontre que toute configuration finie de points et de droites qu'on peut obtenir en utilisant ces points à l'infini a un équivalent sans les utiliser sur le plan ordinaire.

Le dessin B donne une représentation avec des parallèles et l'indication des points à l'infini utilisés. Il y a 13 points, dont 4 à l'infini, et seulement 6 droites ordinaires tracées en noir.

Le dessin C reprend le dessin B en plaçant les points et les droites sur un plan en perspective avec une ligne d'horizon qui correspond à l'ensemble des points à l'infini. Les quatre points à l'infini de la configuration B de 13 points sont maintenant

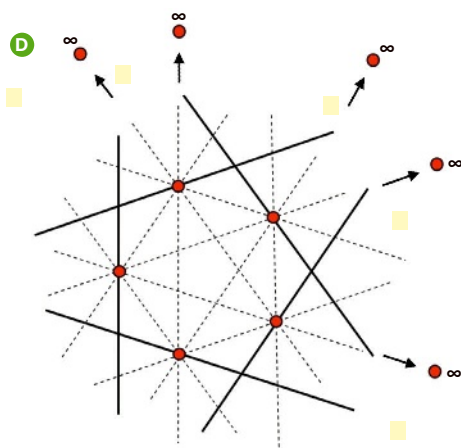
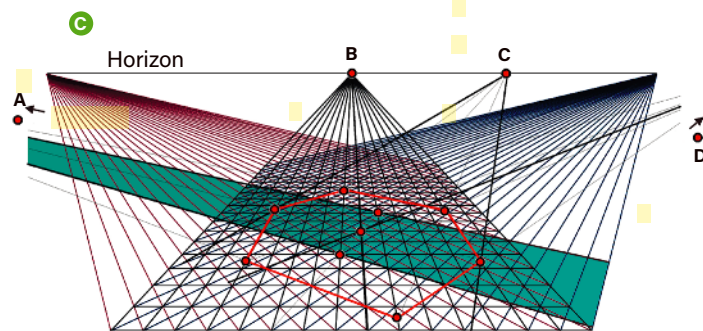
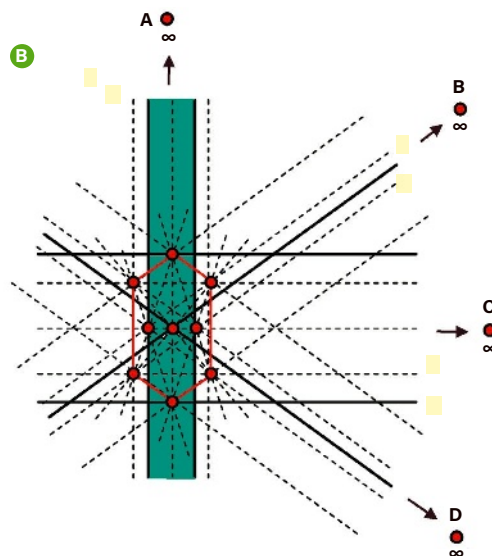
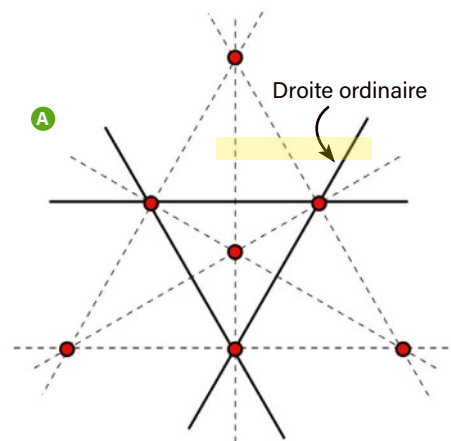
tous à distance finie sur la ligne d'horizon, même si A et D sont un peu trop à gauche et à droite pour qu'on les voie.

Le procédé pour ramener des points à l'infini du plan projectif à distance finie est général et son existence rend plus facile la recherche et la représentation des configurations qu'on rencontre au sujet des problèmes d'alignement de points.

Le dessin D utilise encore des points à l'infini. Il représente une configuration de 10 points, dont 5 à l'infini, n'engendrant que 5 droites ordinaires. La configuration due au mathématicien hongrois Károly Böröczky se généralise avec $2m$ points et m droites ordinaires. Elle montre que le résultat de Ben Green et Terence Tao est le meilleur possible : si n est pair, on ne peut pas prouver qu'il y a toujours plus de $n/2$ droites ordinaires pour n points non colinéaires.

Dans le plan projectif, il existe une dualité parfaite entre points et droites. L'affirmation « par deux points distincts passe une droite unique » devient par dualité « deux droites distinctes se rencontrent en un point unique ». Tout énoncé, et toute figure, concernant les points et les droites donne un énoncé dual et une figure duale où les mots « droite » et « point » sont échangés.

Ainsi, le théorème de Sylvester-Gallai qui s'énonce : « Tout ensemble fini E de points non colinéaires définit au moins une droite passant par seulement deux points de E » devient, par dualité : « Tout ensemble fini E de droites ne passant pas toutes par un même point définit au moins un point qui n'appartient qu'à deux droites de E ».



LA CONFIGURATION DE HESSE

deux points de E et un point à l'extérieur de cette droite. Elle permet de définir un algorithme qui, pour tout ensemble E de n points non colinéaires, trouve deux points de E déterminant une droite ordinaire de E (c'est-à-dire ne rencontrant pas d'autres points de E). L'algorithme consiste à prendre tous les triplets (A, B, C) de points différents de E et à calculer la distance de A à la droite BC , de B à AC et de C à AB . La plus petite valeur obtenue quand on fait défiler tous les triplets, par exemple pour la distance de A à BC , indique que BC est une droite ordinaire. Le fait d'envisager tous les triplets de points de E a pour conséquence que l'algorithme donne sa réponse en un nombre d'étapes qui, dans le pire des cas, est proportionnel à n^3 .

Une meilleure efficacité est possible. Herbert Edelsbrunner et Leonidas Guibas ont proposé en 1989 un algorithme dont le temps de calcul est au pire proportionnel à n^2 . Le résultat a encore été amélioré en 1997: Asish Mukhopadhyay, Alok Agrawal, et Ravi Hosabettu ont trouvé un algorithme qui ne demande cette fois qu'un nombre d'étapes proportionnel à $n \log(n)$ pour trouver une droite ordinaire dans un ensemble de n points non colinéaires du plan.

EXTENSIONS ET EXCEPTIONS

Le théorème de Sylvester-Gallai se généralise-t-il à d'autres géométries? La question a été soigneusement étudiée et la réponse est intéressante, mais un peu compliquée car elle varie d'une géométrie à l'autre.

En dimension n , c'est-à-dire en considérant l'espace euclidien défini par les n -uplets de nombres réels, le théorème reste vrai. Voici le raisonnement qui le démontre. On se donne un ensemble E de k points non colinéaires dans l'espace, notés $A_1, A_2, \dots, A_k$. On en prend trois non colinéaires, il détermine un plan P . On projette les k points orthogonalement sur P , ce qui donne k points $B_1, B_2, \dots, B_k$ de P qui sont non colinéaires, car les trois points utilisés sont restés inchangés par la projection. Le théorème de Sylvester-Gallai appliqué à ce plan et ces points indique qu'il existe deux points B_i et B_j déterminant une droite D qui ne contient aucun autre point B_m . Les deux points A_i et A_j déterminent dans l'espace une droite qui ne contient aucun autre point A_n , sinon le point B_n serait aligné avec B_i et B_j (car la projection de points colinéaires donne des points colinéaires). Les points $A_1, A_2, \dots, A_k$ déterminent donc dans l'espace au moins une droite ordinaire de E .

Voici un autre exemple où le théorème reste vrai. Le plan projectif est obtenu en ajoutant un point à l'infini pour chaque famille de droites parallèles du plan ordinaire, point où se rencontrent toutes les droites de la famille (voir

3

La configuration de Hesse figurée ci-dessous a été imaginée par le mathématicien Colin Maclaurin (1698-1746) et étudiée par Otto Hesse (1811-1874). Elle est composée de neuf points qui déterminent exactement douze droites passant chacune exactement par trois points.

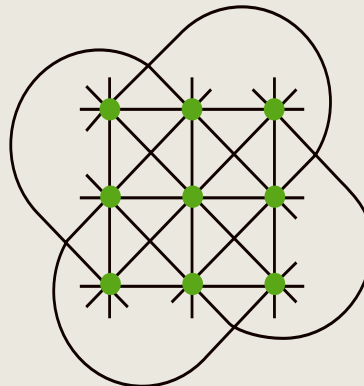
Elle ne peut pas exister sur le plan ordinaire, ni sur le plan projectif, car elle contredirait le théorème de Sylvester-Gallai.

En revanche, on peut la construire dans diverses géométries fondées sur les nombres complexes ou sur les corps finis.

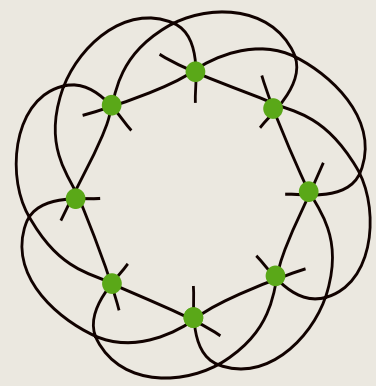
C'est un objet géométrique étrange qui donne lieu aujourd'hui encore à des recherches dont par exemple celles-ci : - F. Polizzi et al., « What are

Sylvester-Gallai configurations in the complex projective plane ? », 2017 (<https://bit.ly/3wMKNag>). - A. Bassa et A. U. O. Kisisel, « The only complex 4-net is the Hesse configuration », prépublication arXiv, 2020 (<https://arxiv.org/abs/2002.02660>).

La configuration de Möbius-Kantor, également représentée ci-dessous, est composée de huit droites de trois points, sans droite ordinaire. Elle contredit aussi le théorème de Sylvester-Gallai. On ne peut donc pas la trouver dans le plan ordinaire. Certaines géométries, dont celle du plan projectif complexe, la rendent possible (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius-Kantor_configuration).



Configuration de Hesse



Configuration de Möbius-Kantor

l'encadré 2). Ces points ajoutés à l'infini forment une nouvelle droite. Le théorème de Sylvester-Gallai reste vrai pour le plan projectif habituel, et il est d'ailleurs bien commode de se placer dans cette géométrie avec des points à l'infini, car toute configuration finie de points et de droites qu'on trouve en géométrie projective du plan possède un équivalent en géométrie habituelle (sans point à l'infini). Pour dessiner des configurations de points aux propriétés particulières, on peut donc raisonner en considérant que deux parallèles se croisent en un point (voir *l'encadré 2* pour des exemples de ce type de considérations et la méthode pour ramener les points à l'infini à distance finie).

Le plan projectif utilisant les nombres complexes donne un exemple de géométrie où le théorème de Sylvester-Gallai n'est plus vrai. On peut en effet y construire une structure appelée « configuration de Hesse » découverte par le