

LA CONFIGURATION DE HESSE

deux points de E et un point à l'extérieur de cette droite. Elle permet de définir un algorithme qui, pour tout ensemble E de n points non colinéaires, trouve deux points de E déterminant une droite ordinaire de E (c'est-à-dire ne rencontrant pas d'autres points de E). L'algorithme consiste à prendre tous les triplets (A, B, C) de points différents de E et à calculer la distance de A à la droite BC , de B à AC et de C à AB . La plus petite valeur obtenue quand on fait défiler tous les triplets, par exemple pour la distance de A à BC , indique que BC est une droite ordinaire. Le fait d'envisager tous les triplets de points de E a pour conséquence que l'algorithme donne sa réponse en un nombre d'étapes qui, dans le pire des cas, est proportionnel à n^3 .

Une meilleure efficacité est possible. Herbert Edelsbrunner et Leonidas Guibas ont proposé en 1989 un algorithme dont le temps de calcul est au pire proportionnel à n^2 . Le résultat a encore été amélioré en 1997: Asish Mukhopadhyay, Alok Agrawal, et Ravi Hosabettu ont trouvé un algorithme qui ne demande cette fois qu'un nombre d'étapes proportionnel à $n \log(n)$ pour trouver une droite ordinaire dans un ensemble de n points non colinéaires du plan.

EXTENSIONS ET EXCEPTIONS

Le théorème de Sylvester-Gallai se généralise-t-il à d'autres géométries? La question a été soigneusement étudiée et la réponse est intéressante, mais un peu compliquée car elle varie d'une géométrie à l'autre.

En dimension n , c'est-à-dire en considérant l'espace euclidien défini par les n -uplets de nombres réels, le théorème reste vrai. Voici le raisonnement qui le démontre. On se donne un ensemble E de k points non colinéaires dans l'espace, notés $A_1, A_2, \dots, A_k$. On en prend trois non colinéaires, il détermine un plan P . On projette les k points orthogonalement sur P , ce qui donne k points $B_1, B_2, \dots, B_k$ de P qui sont non colinéaires, car les trois points utilisés sont restés inchangés par la projection. Le théorème de Sylvester-Gallai appliqué à ce plan et ces points indique qu'il existe deux points B_i et B_j déterminant une droite D qui ne contient aucun autre point B_m . Les deux points A_i et A_j déterminent dans l'espace une droite qui ne contient aucun autre point A_n , sinon le point B_n serait aligné avec B_i et B_j (car la projection de points colinéaires donne des points colinéaires). Les points $A_1, A_2, \dots, A_k$ déterminent donc dans l'espace au moins une droite ordinaire de E .

Voici un autre exemple où le théorème reste vrai. Le plan projectif est obtenu en ajoutant un point à l'infini pour chaque famille de droites parallèles du plan ordinaire, point où se rencontrent toutes les droites de la famille (voir

3

La configuration de Hesse figurée ci-dessous a été imaginée par le mathématicien Colin Maclaurin (1698-1746) et étudiée par Otto Hesse (1811-1874). Elle est composée de neuf points qui déterminent exactement douze droites passant chacune exactement par trois points.

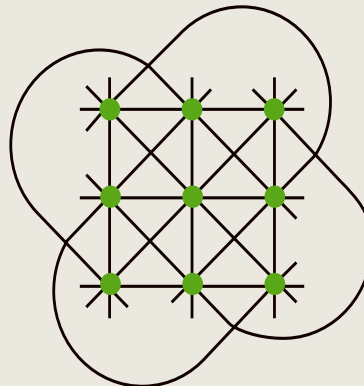
Elle ne peut pas exister sur le plan ordinaire, ni sur le plan projectif, car elle contredirait le théorème de Sylvester-Gallai.

En revanche, on peut la construire dans diverses géométries fondées sur les nombres complexes ou sur les corps finis.

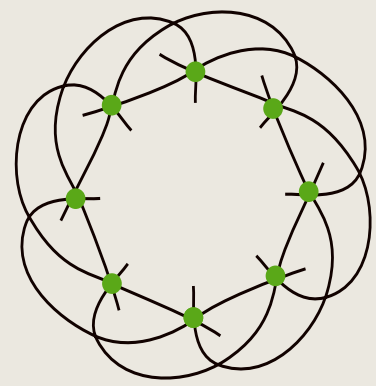
C'est un objet géométrique étrange qui donne lieu aujourd'hui encore à des recherches dont par exemple celles-ci : - F. Polizzi et al., « What are

Sylvester-Gallai configurations in the complex projective plane ? », 2017 (<https://bit.ly/3wMKNag>). - A. Bassa et A. U. O. Kisiel, « The only complex 4-net is the Hesse configuration », prépublication arXiv, 2020 (<https://arxiv.org/abs/2002.02660>).

La configuration de Möbius-Kantor, également représentée ci-dessous, est composée de huit droites de trois points, sans droite ordinaire. Elle contredit aussi le théorème de Sylvester-Gallai. On ne peut donc pas la trouver dans le plan ordinaire. Certaines géométries, dont celle du plan projectif complexe, la rendent possible (voir https://en.wikipedia.org/wiki/Möbius-Kantor_configuration).



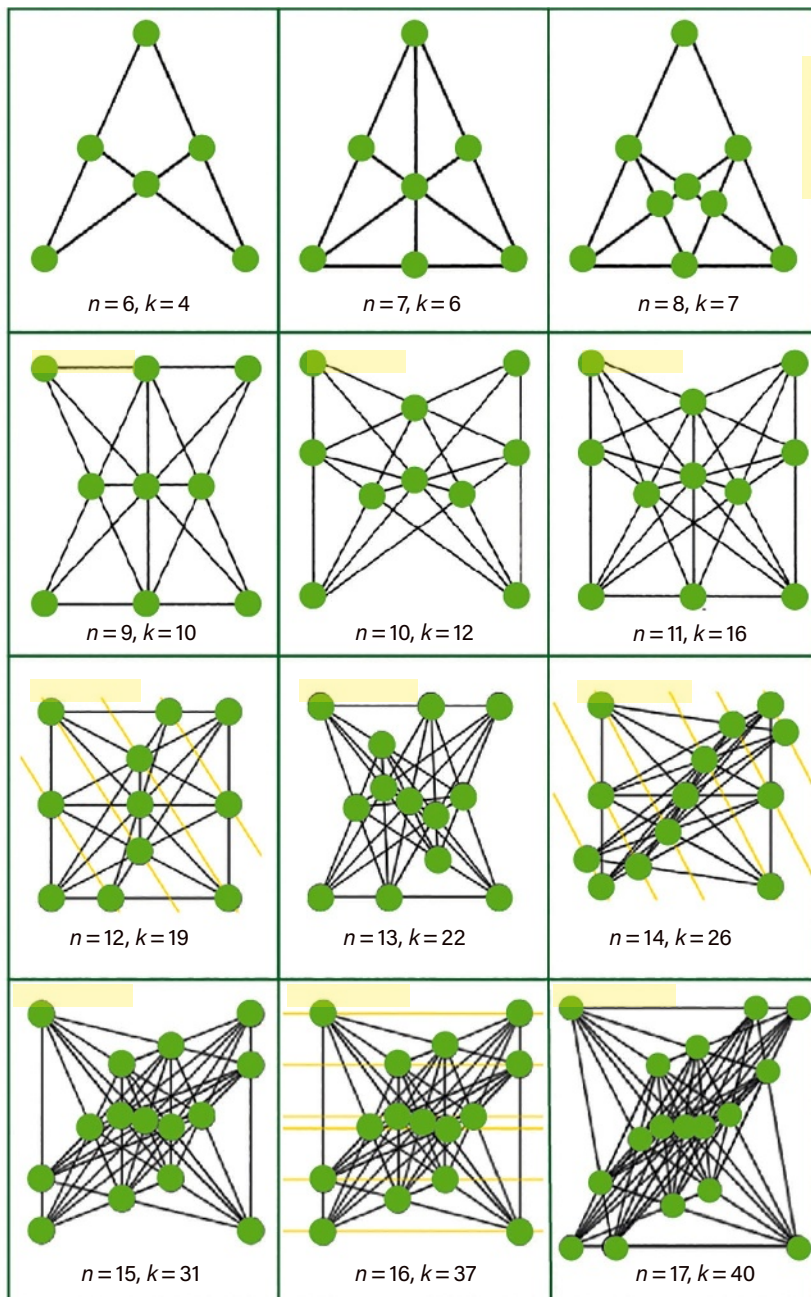
Configuration de Hesse



Configuration de Möbius-Kantor

l'encadré 2). Ces points ajoutés à l'infini forment une nouvelle droite. Le théorème de Sylvester-Gallai reste vrai pour le plan projectif habituel, et il est d'ailleurs bien commode de se placer dans cette géométrie avec des points à l'infini, car toute configuration finie de points et de droites qu'on trouve en géométrie projective du plan possède un équivalent en géométrie habituelle (sans point à l'infini). Pour dessiner des configurations de points aux propriétés particulières, on peut donc raisonner en considérant que deux parallèles se croisent en un point (voir *l'encadré 2* pour des exemples de ce type de considérations et la méthode pour ramener les points à l'infini à distance finie).

Le plan projectif utilisant les nombres complexes donne un exemple de géométrie où le théorème de Sylvester-Gallai n'est plus vrai. On peut en effet y construire une structure appelée « configuration de Hesse » découverte par le



mathématicien Colin Maclaurin (1698-1746) et étudiée par Otto Hesse (1811-1874). Elle est composée de 9 points qui déterminent exactement 12 droites passant chacune exactement par 3 points (voir l'encadré 3).

La configuration de Hesse existe aussi pour diverses géométries finies pour lesquelles le théorème de Sylvester-Gallai ne sera pas vrai. Considérons par exemple la géométrie définie par les 9 couples de nombres entiers modulo 3. Les droites sont les ensembles de couples (X, Y) de nombres entiers modulo 3 vérifiant une équation du type $aX + bY = c$ (modulo 3).

Détaillons les objets de cette géométrie. Le plan ne comporte que neuf points: $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, 2)$. Il contient exactement 12 droites de 3 points chacune.

Pour trouver ces droites, on écrit de toutes les façons possibles les équations d'une droite. Chacune est de la forme $aX + bY = c$ en prenant en compte que l'on calcule modulo 3. Les paramètres a , b et c ont donc trois valeurs possibles: 0, 1 et 2. Cela fait *a priori* $3 \times 3 \times 3 = 27$ équations possibles, mais certaines sont équivalentes comme $X + Y = 0$ et $2X + 2Y = 0$ qui ont chacune les trois mêmes points $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Après simplification, il reste exactement 12 droites, dont voici la liste:

- la droite d'équation $X = 0$, qui comporte les trois points $(0, 0)$, $(0, 1)$, et $(0, 2)$;
- la droite d'équation $X = 1$, dont les trois points sont $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$;
- $X = 2$, qui contient $(2, 0)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$;
- $Y = 0$, qui contient $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(2, 0)$;
- $Y = 1$, qui contient $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$;
- $Y = 2$, qui contient $(0, 2)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$;
- $X + Y = 0$, qui contient $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$;
- $X + Y = 1$, qui contient $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(2, 2)$;
- $X + Y = 2$, qui contient $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(1, 1)$;
- $X + 2Y = 0$, qui contient $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, 2)$;
- $X + 2Y = 1$, qui contient $(0, 2)$, $(1, 0)$ et $(2, 1)$;
- $X + 2Y = 2$, qui contient $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 0)$.

Plusieurs études ont été menées concernant les axiomes précis qu'il faut retenir de façon à pouvoir démontrer le théorème de Sylvester-Gallai. En 1969, le géomètre britannique Harold Coxeter a noté que la géométrie fondée uniquement sur la notion d'ordre, c'est-à-dire qui utilise le prédicat «le point X est entre les points A et B», permet d'obtenir le théorème de Sylvester-Gallai. Pour Coxeter, utiliser la notion de distance entre un point et une droite comme dans la preuve de Kelly détaillée dans l'encadré 1 revient à «utiliser un marteau-pilon pour écraser une mouche».

La question de l'axiomatique nécessaire et suffisante pour que le théorème de Sylvester-Gallai soit valide est maintenant bien comprise grâce aux travaux de Victor Pambuccian publiés en 2009 (voir la bibliographie).

4

MAXIMUM D'ALIGNEMENTS DE TROIS POINTS

On cherche à créer le plus grand nombre possible d'alignements de trois points avec un nombre donné de points. Amusez-vous à rechercher les solutions pour : 7 points et 6 lignes de 3 points, 8 points et 7 lignes de 3 points, 9 points et 10 lignes de 3 points, 10 points et 12 lignes de 3 points, 11 points et 16 lignes de 3 points, 12 points et 19 lignes de 3 points, 13 points et 22 lignes de 3 points, 14 points et 26 lignes de 3 points, 15 points et 31 lignes de 3 points, 16 points et 37 lignes de 3 points, 17 points et 40 lignes de 3 points, 18 points et 46 lignes de 3 points,

Pour toutes les valeurs présentées ici, sauf $n = 17$, on a prouvé qu'on ne pouvait pas faire un plus grand nombre d'alignements que ceux présentés sur la figure. Pour $n=17$, on sait seulement qu'il est impossible de dépasser 42. Voir dans le tableau du texte d'autres questions incomplètement résolues. Certaines solutions ont été dessinées avec des points à l'infini (lignes en jaune). L'encadré 2 explique comment en déduire une solution sans point à l'infini si on le souhaite.