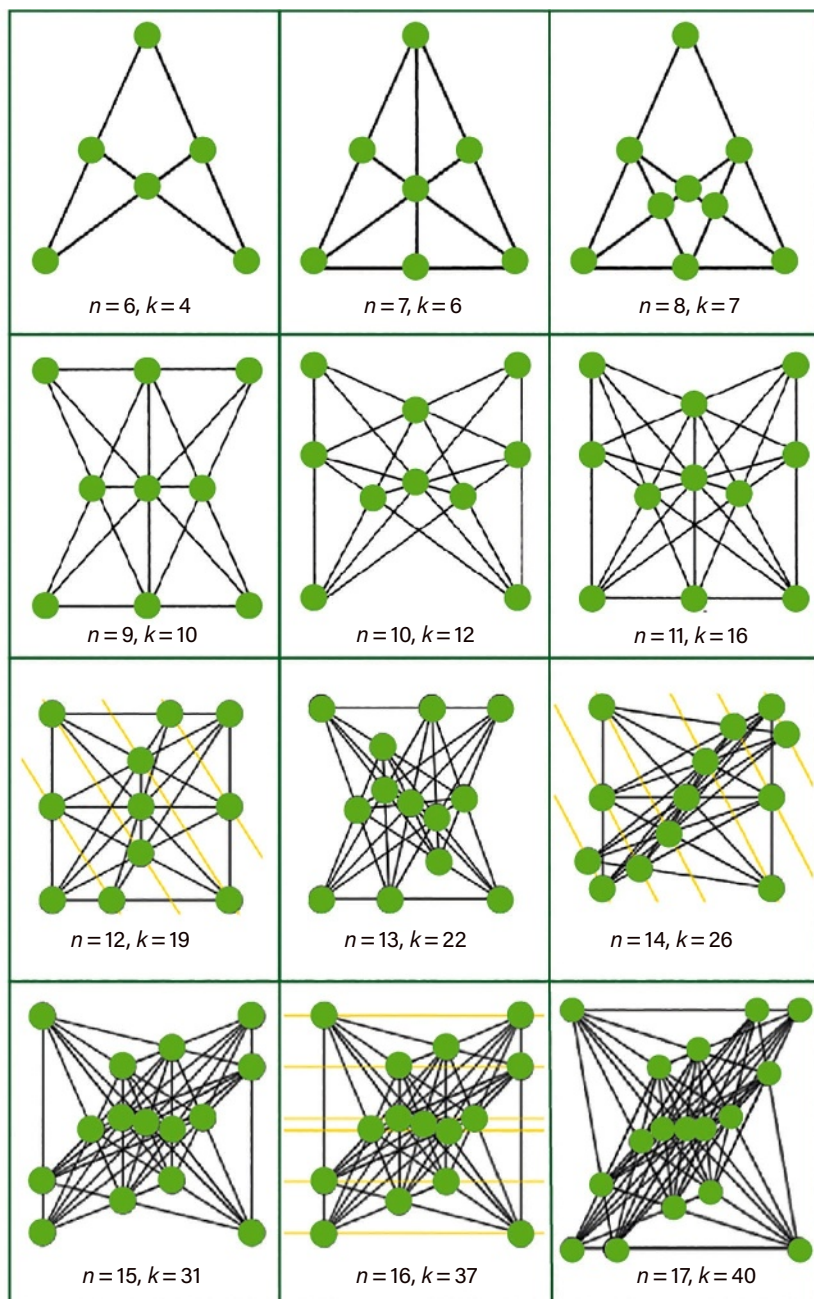




4

MAXIMUM D'ALIGNEMENTS DE TROIS POINTS

On cherche à créer le plus grand nombre possible d'alignements de trois points avec un nombre donné de points. Amusez-vous à rechercher les solutions pour : 7 points et 6 lignes de 3 points, 8 points et 7 lignes de 3 points, 9 points et 10 lignes de 3 points, 10 points et 12 lignes de 3 points, 11 points et 16 lignes de 3 points, 12 points et 19 lignes de 3 points, 13 points et 22 lignes de 3 points, 14 points et 26 lignes de 3 points, 15 points et 31 lignes de 3 points, 16 points et 37 lignes de 3 points, 17 points et 40 lignes de 3 points, 18 points et 46 lignes de 3 points,

Pour toutes les valeurs présentées ici, sauf $n = 17$, on a prouvé qu'on ne pouvait pas faire un plus grand nombre d'alignements que ceux présentés sur la figure. Pour $n=17$, on sait seulement qu'il est impossible de dépasser 42. Voir dans le tableau du texte d'autres questions incomplètement résolues. Certaines solutions ont été dessinées avec des points à l'infini (lignes en jaune). L'encadré 2 explique comment en déduire une solution sans point à l'infini si on le souhaite.

mathématicien Colin Maclaurin (1698-1746) et étudiée par Otto Hesse (1811-1874). Elle est composée de 9 points qui déterminent exactement 12 droites passant chacune exactement par 3 points (voir l'encadré 3).

La configuration de Hesse existe aussi pour diverses géométries finies pour lesquelles le théorème de Sylvester-Gallai ne sera pas vrai. Considérons par exemple la géométrie définie par les 9 couples de nombres entiers modulo 3. Les droites sont les ensembles de couples (X, Y) de nombres entiers modulo 3 vérifiant une équation du type $aX + bY = c$ (modulo 3).

Détaillons les objets de cette géométrie. Le plan ne comporte que neuf points: $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, 2)$. Il contient exactement 12 droites de 3 points chacune.

Pour trouver ces droites, on écrit de toutes les façons possibles les équations d'une droite. Chacune est de la forme $aX + bY = c$ en prenant en compte que l'on calcule modulo 3. Les paramètres a , b et c ont donc trois valeurs possibles: 0, 1 et 2. Cela fait *a priori* $3 \times 3 \times 3 = 27$ équations possibles, mais certaines sont équivalentes comme $X + Y = 0$ et $2X + 2Y = 0$ qui ont chacune les trois mêmes points $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$. Après simplification, il reste exactement 12 droites, dont voici la liste:

- la droite d'équation $X = 0$, qui comporte les trois points $(0, 0)$, $(0, 1)$, et $(0, 2)$;
- la droite d'équation $X = 1$, dont les trois points sont $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 2)$;
- $X = 2$, qui contient $(2, 0)$, $(2, 1)$ et $(2, 2)$;
- $Y = 0$, qui contient $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(2, 0)$;
- $Y = 1$, qui contient $(0, 1)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$;
- $Y = 2$, qui contient $(0, 2)$, $(1, 2)$ et $(2, 2)$;
- $X + Y = 0$, qui contient $(0, 0)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$;
- $X + Y = 1$, qui contient $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(2, 2)$;
- $X + Y = 2$, qui contient $(0, 2)$, $(2, 0)$ et $(1, 1)$;
- $X + 2Y = 0$, qui contient $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(2, 2)$;
- $X + 2Y = 1$, qui contient $(0, 2)$, $(1, 0)$ et $(2, 1)$;
- $X + 2Y = 2$, qui contient $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 0)$.

Plusieurs études ont été menées concernant les axiomes précis qu'il faut retenir de façon à pouvoir démontrer le théorème de Sylvester-Gallai. En 1969, le géomètre britannique Harold Coxeter a noté que la géométrie fondée uniquement sur la notion d'ordre, c'est-à-dire qui utilise le prédicat «le point X est entre les points A et B », permet d'obtenir le théorème de Sylvester-Gallai. Pour Coxeter, utiliser la notion de distance entre un point et une droite comme dans la preuve de Kelly détaillée dans l'encadré 1 revient à «utiliser un marteau-pilon pour écraser une mouche».

La question de l'axiomatique nécessaire et suffisante pour que le théorème de Sylvester-Gallai soit valide est maintenant bien comprise grâce aux travaux de Victor Pambuccian publiés en 2009 (voir la bibliographie).