

Les alignements de points du plan suggèrent aussi une série de questions ludiques qu'on attaquera comme des sudokus avec du papier et un crayon, ou qu'on programmera quand cela devient trop compliqué. Ces problèmes portent le nom de «problèmes des vergers» car on peut les formuler en s'interrogeant sur la façon de choisir les emplacements des arbres à planter dans un verger.

## LE PROBLÈME DES VERGERS

Les plus simples de ces problèmes sont les problèmes de la maximisation des alignements de trois points : comment disposer  $n$  points sur le plan de façon à obtenir le plus grand nombre possible d'alignements de trois points ?

Sans consulter l'encadré 4 qui donne des solutions, posez-vous les problèmes suivants, de difficulté croissante :

- Disposer 6 points de telle façon qu'ils engendrent 4 lignes de trois points ;
- Disposer 7 points de telle façon qu'ils engendrent 6 lignes de trois points ;
- Disposer 8 points de telle façon qu'ils engendrent 7 lignes de trois points ;
- Disposer 9 points de telle façon qu'ils engendrent 10 lignes de trois points ;
- Disposer 10 points de telle façon qu'ils engendrent 12 lignes de trois points ;
- Disposer 11 points de telle façon qu'ils engendrent 16 lignes de trois points.

Poursuivez plus loin en recherchant, pour chaque entier  $n$ , le nombre maximal de lignes de trois points qu'il est possible d'obtenir en les plaçant sur un plan.

Trouver une configuration de  $n$  points engendrant  $k$  lignes de trois points est bien, mais comment être certain qu'on ne peut pas faire mieux ? La question a été attentivement étudiée et l'état de l'art est indiqué dans le tableau suivant.

Alignements de trois points

|     |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n$ | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| $k$ | 6 | 7 | 10 | 12 | 16 | 19 | 22 | 26 | 31 | 37 | 40 | 46 | 52 | 57 | 64 | 70 | 77 | 85 | 92 |
| $m$ | 6 | 7 | 10 | 12 | 16 | 19 | 22 | 26 | 32 | 37 | 42 | 48 | 54 | 60 | 67 | 73 | 81 | 88 | 96 |

Pour chaque entier  $n$ , la seconde ligne du tableau donne le nombre  $k$  de droites de trois points que comporte la meilleure configuration connue de  $n$  points. Sur la troisième ligne du tableau, le nombre  $m$  indique qu'on sait démontrer qu'on ne peut pas faire mieux que  $m$  alignements. Une égalité entre  $k$  et  $m$  signifie qu'on connaît une configuration de  $n$  points donnant  $k$  droites de trois points, et qu'on a prouvé qu'on ne pouvait pas faire mieux ; le problème est donc entièrement résolu pour cette valeur de  $n$ .

Lorsque le nombre  $k$  indiqué sur la deuxième ligne est inférieur au nombre  $m$  sur la troisième, cela signifie qu'on connaît une configuration de  $n$  points donnant  $k$  droites de trois

points, mais qu'il pourrait en exister avec  $m$  droites de trois points. Le problème n'est donc qu'imparfaitement résolu.

Le raisonnement suivant montre que le nombre maximum de lignes de trois points est inférieur à  $\lceil n(n-1)/6 \rceil$  (où  $\lceil x \rceil$  désigne la partie entière de  $x$ ), ce qui permet d'écrire un résultat sur chacune des cases de la troisième ligne du tableau. Le nombre de paires de points différents dans un ensemble de  $n$  points est  $n(n-1)/2$  (nombre de sous-ensembles à deux éléments pris dans un ensemble à  $n$  éléments). Une droite contenant les trois points A, B, et C contient trois de ces paires :  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$ ,  $\{B, C\}$ . Deux droites différentes de trois points ne peuvent pas contenir une même paire, car par deux points donnés passe une seule droite ! Par conséquent, il y a au plus trois fois moins de droites de trois points que de paires de points ; il y a donc au plus  $\lceil n(n-1)/6 \rceil$  droites de trois points avec  $n$  points.

Ce résultat a été amélioré en 1993 par Joseph Csima et Eric Sawyer, qui ont établi la borne supérieure très légèrement meilleure :  $\lceil n^2/6 - 25n/78 \rceil$ .

Du côté des constructions générales, S. Burr, B. Grünbaum et N. Sloane proposèrent en 1974 une méthode générale pour disposer  $n$  points déterminant  $\lceil n^2/6 - n/2 + 1 \rceil$  alignements de trois points.

En 2013, Ben Green et Terence Tao ont montré que ce nombre ne peut pas être dépassé du moins pour tous les entiers  $n$  plus grands qu'un certain  $n_1$ . Le problème est donc résolu pour tous les entiers au-delà de  $n_1$ , malheureusement à nouveau ce  $n_1$  est très grand, ce qui laisse le problème imparfaitement résolu pour un grand nombre d'entiers inférieurs à ce  $n_1$ .

## ALIGNEMENTS DE QUATRE POINTS

Si à la place d'alignements de trois points, on s'intéresse aux alignements de quatre points, cinq points, etc., on tombe sur de nouvelles séries infinies de problèmes. Voici, pour les alignements de quatre points, le tableau de ce qui est connu. Le tableau est disposé comme celui qui portait sur les alignements de trois points.

Alignements de quatre points

|     |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| $k$ | 2 | 2 | 3 | 5  | 6  | 7  | 9  | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 | 23 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| $m$ | 2 | 2 | 3 | 5  | 6  | 7  | 9  | 10 | 12 | 15 | 16 | 18 | 20 | 23 | 31 | 38 | 40 | 42 | 50 |

Il ne faudrait pas imaginer que la géométrie des alignements ne comportent que de petits problèmes faciles à résoudre. Les dizaines d'articles de recherche et plusieurs livres récents sur le sujet, dont nous n'avons fait qu'effleurer le contenu, attestent qu'il s'agit d'un sujet mathématique vieux de trois mille ans et toujours bien vivant. ■

## BIBLIOGRAPHIE

D. Eppstein, **Forbidden configurations in discrete geometry**, Cambridge University Press, 2018.

J. Pach, **Finite point configurations**, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pp. 3-26, CRC Press, 2018.

E. Pegg, **Cultivating new solutions for the Orchard-Planting problem**, 2018 : <https://bit.ly/3204ywh>

B. Green et T. Tao, **On sets defining few ordinary lines**, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 50, pp. 409-468, 2013.

V. Pambuccian, **A reverse analysis of the Sylvester-Gallai theorem**, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 50(3), pp. 245-260, 2009.

M. Gardner, **Time Travel and Other Mathematical Bewilderments**, Freeman, pp. 277-290, 1988.

E. Melchior, **Über Vielseite der projektiven Ebene**, *Deutsche Math.*, vol. 5, pp. 461-475, 1941.

J. Sylvester, **Mathematical question 11851**, *Educational Times*, vol. 59, p. 98, 1893.