

Les alignements de points du plan suggèrent aussi une série de questions ludiques qu'on attaquera comme des sudokus avec du papier et un crayon, ou qu'on programmera quand cela devient trop compliqué. Ces problèmes portent le nom de «problèmes des vergers» car on peut les formuler en s'interrogeant sur la façon de choisir les emplacements des arbres à planter dans un verger.

LE PROBLÈME DES VERGERS

Les plus simples de ces problèmes sont les problèmes de la maximisation des alignements de trois points : comment disposer n points sur le plan de façon à obtenir le plus grand nombre possible d'alignements de trois points ?

Sans consulter l'encadré 4 qui donne des solutions, posez-vous les problèmes suivants, de difficulté croissante :

- Disposer 6 points de telle façon qu'ils engendrent 4 lignes de trois points ;
- Disposer 7 points de telle façon qu'ils engendrent 6 lignes de trois points ;
- Disposer 8 points de telle façon qu'ils engendrent 7 lignes de trois points ;
- Disposer 9 points de telle façon qu'ils engendrent 10 lignes de trois points ;
- Disposer 10 points de telle façon qu'ils engendrent 12 lignes de trois points ;
- Disposer 11 points de telle façon qu'ils engendrent 16 lignes de trois points.

Poursuivez plus loin en recherchant, pour chaque entier n , le nombre maximal de lignes de trois points qu'il est possible d'obtenir en les plaçant sur un plan.

Trouver une configuration de n points engendrant k lignes de trois points est bien, mais comment être certain qu'on ne peut pas faire mieux ? La question a été attentivement étudiée et l'état de l'art est indiqué dans le tableau suivant.

Alignements de trois points

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
k	6	7	10	12	16	19	22	26	31	37	40	46	52	57	64	70	77	85	92
m	6	7	10	12	16	19	22	26	32	37	42	48	54	60	67	73	81	88	96

Pour chaque entier n , la seconde ligne du tableau donne le nombre k de droites de trois points que comporte la meilleure configuration connue de n points. Sur la troisième ligne du tableau, le nombre m indique qu'on sait démontrer qu'on ne peut pas faire mieux que m alignements. Une égalité entre k et m signifie qu'on connaît une configuration de n points donnant k droites de trois points, et qu'on a prouvé qu'on ne pouvait pas faire mieux ; le problème est donc entièrement résolu pour cette valeur de n .

Lorsque le nombre k indiqué sur la deuxième ligne est inférieur au nombre m sur la troisième, cela signifie qu'on connaît une configuration de n points donnant k droites de trois

points, mais qu'il pourrait en exister avec m droites de trois points. Le problème n'est donc qu'imparfaitement résolu.

Le raisonnement suivant montre que le nombre maximum de lignes de trois points est inférieur à $\lceil n(n-1)/6 \rceil$ (où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière de x), ce qui permet d'écrire un résultat sur chacune des cases de la troisième ligne du tableau. Le nombre de paires de points différents dans un ensemble de n points est $n(n-1)/2$ (nombre de sous-ensembles à deux éléments pris dans un ensemble à n éléments). Une droite contenant les trois points A, B, et C contient trois de ces paires : $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{B, C\}$. Deux droites différentes de trois points ne peuvent pas contenir une même paire, car par deux points donnés passe une seule droite ! Par conséquent, il y a au plus trois fois moins de droites de trois points que de paires de points ; il y a donc au plus $\lceil n(n-1)/6 \rceil$ droites de trois points avec n points.

Ce résultat a été amélioré en 1993 par Joseph Csima et Eric Sawyer, qui ont établi la borne supérieure très légèrement meilleure : $\lceil n^2/6 - 25n/78 \rceil$.

Du côté des constructions générales, S. Burr, B. Grünbaum et N. Sloane proposèrent en 1974 une méthode générale pour disposer n points déterminant $\lceil n^2/6 - n/2 + 1 \rceil$ alignements de trois points.

En 2013, Ben Green et Terence Tao ont montré que ce nombre ne peut pas être dépassé du moins pour tous les entiers n plus grands qu'un certain n_1 . Le problème est donc résolu pour tous les entiers au-delà de n_1 , malheureusement à nouveau ce n_1 est très grand, ce qui laisse le problème imparfaitement résolu pour un grand nombre d'entiers inférieurs à ce n_1 .

ALIGNEMENTS DE QUATRE POINTS

Si à la place d'alignements de trois points, on s'intéresse aux alignements de quatre points, cinq points, etc., on tombe sur de nouvelles séries infinies de problèmes. Voici, pour les alignements de quatre points, le tableau de ce qui est connu. Le tableau est disposé comme celui qui portait sur les alignements de trois points.

Alignements de quatre points

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
k	2	2	3	5	6	7	9	10	12	15	16	18	20	23	24	26	28	30	32
m	2	2	3	5	6	7	9	10	12	15	16	18	20	23	24	26	28	30	32

Il ne faudrait pas imaginer que la géométrie des alignements ne comportent que de petits problèmes faciles à résoudre. Les dizaines d'articles de recherche et plusieurs livres récents sur le sujet, dont nous n'avons fait qu'effleurer le contenu, attestent qu'il s'agit d'un sujet mathématique vieux de trois mille ans et toujours bien vivant. ■

BIBLIOGRAPHIE

D. Eppstein, **Forbidden configurations in discrete geometry**, Cambridge University Press, 2018.

J. Pach, **Finite point configurations**, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pp. 3-26, CRC Press, 2018.

E. Pegg, **Cultivating new solutions for the Orchard-Planting problem**, 2018 : <https://bit.ly/3204ywh>

B. Green et T. Tao, **On sets defining few ordinary lines**, *Discrete Comput. Geom.*, vol. 50, pp. 409-468, 2013.

V. Pambuccian, **A reverse analysis of the Sylvester-Gallai theorem**, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 50(3), pp. 245-260, 2009.

M. Gardner, **Time Travel and Other Mathematical Bewilderments**, Freeman, pp. 277-290, 1988.

E. Melchior, **Über Vielseite der projektiven Ebene**, *Deutsche Math.*, vol. 5, pp. 461-475, 1941.

J. Sylvester, **Mathematical question 11851**, *Educational Times*, vol. 59, p. 98, 1893.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à Pour la Science

LES AVENTURIERS DE L'OIE PERDUE

Une oie peinte il y a près de 4600 ans en Égypte serait l'unique trace d'une espèce aujourd'hui disparue.

Au IV^e siècle avant notre ère, des Romains reclus dans le Capitole échappent à un raid gaulois grâce, selon Tite-Live, à l'alerte donnée par... les «oies sacrées de Junon, que, malgré la plus cruelle disette, on avait épargnées; ce qui sauva Rome.» De fait, dans l'Antiquité, et dans plusieurs religions, l'oie avait acquis un statut particulier: elle est l'un des véhicules du dieu hindou Brahmā, la divinité gauloise Belisama chevauche une oie... Dans l'Égypte ancienne, ce volatile parfois divinisé a un statut tout aussi remarquable. Et il est le sujet de l'une des plus anciennes œuvres peintes trouvées dans ce pays, une frise découverte en 1871 par l'Italien Luigi Vassalli sur le site de Meïdoun, à 100 kilomètres au sud du Caire.

Là, se dresse la pyramide de Snéfrou, père de Khéops, qui a régné vers 2600 avant notre ère. Autour, plusieurs

mastabas, c'est-à-dire des tombeaux monumentaux, sont éparpillés. C'est dans l'un d'eux, celui de Néfermaât (fils et vizir de Snéfrou) et son épouse Itet que l'on pouvait voir les six oies dites de Meïdoun avant que le pan de mur ne soit transporté au musée du Caire (voir la reproduction ci-contre).

Le réalisme est tel que l'on distingue plusieurs espèces. Mais lesquelles? Anthony Romilio, de l'université du Queensland, en Australie, s'est penché sur la question. Pour certaines, l'identification est simple et, par exemple, on reconnaît deux oies rieuses *Anser albifrons* ②. Pour d'autres, l'attribution est plus problématique. Ainsi, les deux oies ① dont le bec est au ras du sol sont soit des oies des moissons, *Anser fabalis*, soit des oies cendrées, *Anser anser*, deux espèces morphologiquement très proches.

Les oies de Meïdoun, une fresque conservée au musée du Caire et prélevée dans le mastaba de Néfermaât et d'Itet (les six oies sont alignées dans l'œuvre originale).



Quant aux oiseaux au poitrail roux, on a longtemps débattu: des bernaches à cou roux, *Branta ruficollis* ❸? Ce n'est peut-être pas le cas. D'abord, l'aire de répartition de cette espèce ne correspond pas, car elles nichent au nord de la Sibérie et ne migrent que vers l'Europe du Sud-Est (Bulgarie, Roumanie, Ukraine...). Ensuite, l'analyse des palmipèdes selon le critère de Tobias, du nom de Joseph Tobias, de l'université d'Oxford, en Grande-Bretagne, ne valide pas l'identification. Cette méthode, proposée en 2010 et d'ordinaire appliquée à des espèces actuelles, a été utilisée avec

les caractéristiques anatomiques visibles sur les représentations de Meïdoun (couleur des pattes, taille relative du bec, pourtour des yeux...), c'est inédit pour une image.

Conclusion? Les oies peintes se distinguent trop des bernaches à cou roux, essentiellement au niveau du cou, des flancs et de la poitrine, même en imaginant une licence artistique, et ce alors que toutes les espèces peintes dans le mastaba sont bien identifiables. Ces oies seraient plus probablement les représentantes d'une espèce vivante il y a plus de 4600 ans et aujourd'hui disparue.

L'espèce en question rejoindrait alors la liste de celles, comme l'aurochs *Bos primigenius*, qui n'ont laissé de trace dans l'histoire que sous forme de représentations dans l'art égyptien. ■

A. Romilio, «Assessing "Meidum Geese" species identification with the "Tobias criteria"», *Journal of Archaeological Science: Reports*, vol. 36, 102834, 2021.



L'auteur a publié :
Pollock, Turner, Van Gogh, Vermeer et la science...
(Belin, 2018)

