

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

LES DÉLICATS PARADOXES DE BERRY ET DE SKOLEM

Pour contourner les paradoxes de la définissabilité, il est nécessaire de distinguer théorie et métathéorie.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Lorsque nous formulons une définition, nous risquons d'être victimes d'un paradoxe. L'exemple le plus simple reste le paradoxe de Berry, présenté par Bertrand Russell en 1906. Considérons : «Le plus petit entier positif non définissable par une expression en français ayant moins de dix-neuf mots.»

Tout semble clair. En utilisant les mots de la langue française, qui sont en nombre fini, disons 60000, et en s'imposant d'en utiliser au plus 18, on ne peut définir qu'un nombre fini d'entiers positifs (moins de $60000 \times 60000^2 + \dots + 60000^{18} \approx 10^{86}$). Comme il y a un nombre infini d'entiers, il existe donc des entiers positifs non définissables par une expression de moins de 19 mots. Il y en a un plus petit défini par l'expression donnée plus haut entre guillemets. Hélas, là réside la difficulté : cette expression comporte 18 mots et définit donc en moins de 19 mots un entier positif non définissable par une expression de moins de 19 mots ! Absurdité.

SE PROTÉGER DES PARADOXES

Heureusement, les logiciens ont su se prémunir contre les contradictions qui résulteraient en mathématiques de définitions de ce type. De telles définitions «autocontradictoires» contamineraient tout, puisqu'une seule contradiction entraîne une infinité et rend inutile tout raisonnement. Pour cela, la méthode axiomatique fixe précisément les

termes que nous pouvons utiliser quand nous traitons de nombres ou d'ensembles. Le terme «définissable» ne fait pas partie du langage de base de la majorité des théories car, le plus souvent, nous n'en avons pas besoin pour faire des mathématiques. Il n'est donc pas possible, au sein des systèmes axiomatiques habituels comme l'arithmétique de Peano ou de la théorie des ensembles ZFC (pour Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, voir l'encadré 2), de considérer le plus petit entier positif non définissable en moins de 19 mots. Ouf !

Notons quand même que «vu de l'extérieur», on dit de la *métathéorie*, nous pouvons envisager le plus petit entier positif non définissable dans la théorie T en moins de k symboles. Dans le cas de l'arithmétique de Peano, nous pouvons envisager, de ce point de vue extérieur, pour chaque entier k un «plus petit entier positif non définissable en moins de k symboles». Pour k assez petit, par exemple $k = 1$ ou $k = 2$, ce plus petit entier est 0, car aucun entier n'est définissable dans la théorie en moins de 1 ou 2 symboles !

Approfondissons cela en précisant ce que nous entendons par «définition». Prenons un exemple, en définissant le nombre $\sqrt{2}$. Nous dirons que c'est le nombre x positif dont le carré est égal à 2, c'est-à-dire tel que $x^2 = 2$. Si nous omettions la précision que x est positif, la définition n'en serait pas une, car $-\sqrt{2}$ serait