de nouveaux axiomes, qui augmentent le pouvoir déductif des théories utilisées et qui conduisent à construire une hiérarchie complexe de théories de plus en plus puissantes.

C. La notion de «définissable» est toujours relative à une théorie. C'est la leçon du paradoxe de Berry, mais c'est aussi un résultat du logicien polonais Alfred Tarski. Confirmant les résultats sur le «démontrable», l'étude de la notion de «définissable» oblige à considérer une hiérarchie de théories de plus en plus puissantes, chacune servant de métathéorie à celles placées sous elles, pour lesquelles elle peut exprimer la notion de définissable.

UTILITÉ DES PARADOXES

Notons que les paradoxes des philosophes ou créés pour le plaisir du jeu, même si on ne peut pas les utiliser pour introduire des contradictions dans les théories mathématiques (du moins jusqu'à présent!), sont malgré tout très importants. Il est souvent arrivé que, en s'en inspirant, les logiciens découvrent de nouveaux procédés de démonstration. Le paradoxe du menteur «Je mens» a donné la formule autoréférentielle «Je ne suis pas démontrable dans la théorie T», qui est l'idée de base de la démonstration des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Il se trouve que le paradoxe de Berry, outre qu'il permet de retrouver le théorème d'incomplétude, est aussi l'idée de la démonstration d'un résultat important en théorie de la complexité. Ainsi, d'une variante du paradoxe de Berry (*voir l'encadré 1*), on déduit une démonstration.

Cette récupération des paradoxes de la langue commune pour en faire des démonstrations est utile et amusante, mais certaines subtilités mises en évidence par les paradoxes introduisent des difficultés plus délicates à circonscrire que celles créées par le paradoxe du menteur ou le paradoxe de Berry. On se trouve en effet parfois confronté à des situations où on a du mal à croire que l'on va s'en sortir et où la solution proposée par les logiciens ne laisse pas totalement intacte la confiance qu'on avait dans certains concepts mathématiques.

Récemment, Joel David Hamkins, professeur à l'université d'Oxford et élève du logicien universellement admiré Hugh Woodin, a insisté sur des exemples troublants de la relativité des concepts et de la nécessité absolue de ne pas confondre les concepts externes (métathéoriques) à une théorie et les concepts analogues qu'elle tente de retrouver en interne. L'impossible coïncidence de la métathéorie et de la théorie est réellement déconcertante. Les remarques et exemples de Joel Hamkins sont liés au théorème de Löwenheim-Skolem et au paradoxe qui en résulte, et en aggravent la portée.

Le théorème de Löwenheim-Skolem a été énoncé en 1915 par le mathématicien allemand Leopold Löwenheim et démontré de manière complète en 1920 par le mathématicien norvégien Thoralf Skolem. Énonçons-le avant d'expliciter les termes qui le composent:

Si une théorie formulée dans le cadre de la logique du calcul des prédicats du premier ordre possède un modèle infini, alors elle possède un modèle dénombrable, c'est-à-dire dont les éléments constitutifs sont aussi nombreux que les entiers, mais pas plus.

DES MODÈLES D'UNE THÉORIE

Expliquons cela. Un modèle pour une théorie est une structure qui vérifie les axiomes de la théorie. Si, par exemple, on considère la théorie T ayant pour unique axiome A: $\forall x\, \forall y\, (x \spadesuit y = y \spadesuit x)$, alors la donnée des entiers $\mathbb{N}$ et de l'addition entre entiers en guise d'opération $\spadesuit$ constitue un modèle de T, car on sait que l'addition entre entiers est commutative. La donnée des nombres réels $\mathbb{R}$ et de la multiplication en guise de $\spadesuit$ est un autre modèle de la théorie T, et il y a encore bien d'autres possibilités. Les formules vraies d'une théorie sont celles vérifiées par tous les modèles de la théorie. Il s'agit d'une notion mathématique parfaitement précise dans la métathéorie, puisque la notion de modèle l'est.

Dans notre exemple, la formule f: $\forall x\, (x \spadesuit x) \spadesuit x = x \spadesuit (x \spadesuit x)$ est une formule vraie de la théorie T: vous ne trouverez jamais un ensemble et une opération sur cet ensemble qui vérifie l'axiome A mais pas la formule f. En revanche, la formule g: $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \spadesuit y) \spadesuit z = x \spadesuit (y \spadesuit z)$ n'est pas une formule vraie de la théorie T, car même si elle est vraie dans certains modèles de T, elle ne l'est pas dans tous. Par exemple, la formule g n'est pas vraie en prenant pour modèle la structure définie par les entiers et l'opération $x \spadesuit y = x^2+y^2$, car $(0 \spadesuit 1) \spadesuit 2 = 1+4 = 5$ tandis que $0 \spadesuit (1 \spadesuit 2) = 0 \spadesuit 5 = 25$.

Le «calcul des prédicats du premier ordre» est la logique utilisée pour donner l'exemple ci-dessus de la théorie T avec un seul axiome A. Dans une théorie formulée en calcul des prédicats du premier ordre, on peut utiliser des symboles logiques, des variables, des quantificateurs portant sur les variables, des symboles de prédicats ou d'opérations (comme le $\spadesuit$) ainsi qu'indiqué dans l'encadré 2. Le théorème de complétude de Gödel, démontré par ce dernier en 1929 dans sa thèse de doctorat, indique que la logique du calcul des prédicats du premier ordre est telle que les formules démontrables à partir des axiomes habituels du calcul des prédicats du premier ordre (notion syntaxique) sont les mêmes que les formules vraies de la théorie (c'est-à-dire vraies dans tous les modèles des axiomes).

C'est un résultat central en logique et c'est lui qui justifie qu'on formalise les théories mathématiques en utilisant le calcul des prédicats du premier ordre. Il a en particulier la

2 LANGAGES LOGIQUES

Pour formaliser une théorie mathématique, ce qui est indispensable afin d'éviter les paradoxes comme le paradoxe de Berry, il faut préciser le langage qui permet d'écrire les énoncés de la théorie (hypothèses, théorèmes, démonstrations, etc.).
On s'appuie le plus souvent sur le calcul des prédicats du premier ordre que nous allons examiner.

L'arithmétique de Peano utilise un langage dont les symboles sont :
( ) 0 = s ∀ ∃ ∧ ∨ ¬ ⇔ ⇒ + x y z ...

Pour la liste des variables, on peut se ramener à deux symboles si on veut vraiment économiser les symboles : on utilise x et ', et les noms de variables sont x, x', x'', x'''... Pour plus de lisibilité, nous garderons x, y, z...

Voici un exemple de formule de l'arithmétique de Peano, qui est aussi un axiome de cette théorie :
$\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ x = s(y))$
Elle signifie : pour tout nombre x, $x = 0$ ou il existe un nombre y tel que x est le successeur de y.
La fonction $s(x)$, « successeur de x », désignera 32 si l'on prend $x = 31$.

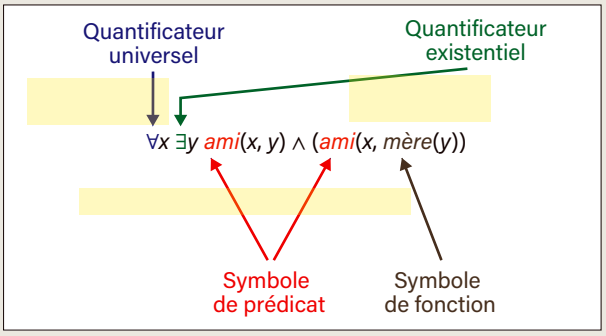
Si l'on en reste au langage strict de la théorie, les entiers sont représentés par 0, $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, etc., mais bien sûr, en pratique, on introduit des raccourcis de notation et on écrit 0, 1, 2, ...

En plus de la définition stricte de ce que sont les formules de la théorie, on fixe aussi les axiomes de la théorie et les règles permettant de déduire de nouvelles formules à partir des axiomes ou de formules déjà démontrées. Ces règles de démonstration sont les mêmes pour toutes les théories exprimées dans le calcul des prédicats du premier ordre.

Venons-en à la notion de prédicat. En logique, un prédicat est une propriété dont la vérité dépend d'une ou plusieurs variables ; selon les objets qu'on substitue aux variables, elle devient vraie ou fausse.

Dans la figure ci-dessus, le prédicat $ami(x, y)$ sera vrai pour x = Jean et y = Jeanne si « Jean est ami de Jeanne ». Le prédicat $nombre\ entier(x)$ sera vrai pour $x = 4$, et sera faux pour $x = \pi$.

Le calcul des prédicats du premier ordre est la logique qui permet de combiner des prédicats et de les manipuler en utilisant des opérations logiques (comme le « et », le « ou » etc.) et des quantificateurs comme ∀ (« quel que soit ») et ∃ (« il existe »). Le calcul des prédicats du premier ordre permet aussi, à l'aide de symboles de fonction, de transformer des objets. La fonction $mère(x)$ pour x = Jeanne désignera Lucie si « Lucie est la mère de Jeanne ». L'exemple de formule du calcul des prédicats du premier ordre donné sur la figure est :
$\forall x\ \exists y\ ami(x, y) \wedge ami(x, mère(y))$
La formule signifie :
« Pour tout x, il existe un y tel que x est ami de y, et x est ami de la mère de y ». Il n'est pas certain que la phrase soit vraie !



Le calcul des prédicats du second ordre est plus général et permet de quantifier sur les prédicats comme dans l'exemple de formule vraie suivante :
$\forall P\ \forall x\ \forall y\ (x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)$
qui signifie que pour tout prédicat P, pour tout x et pour tout y, ($x = y$ et P(x)) entraîne P(y).

Dans le cas de la théorie des ensembles ZFC (pour « Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix »), les symboles de base sont les mêmes sauf que 0, s et + sont remplacés par ∅ et ∈.

Une formule de la théorie des ensembles est par exemple :
$\forall x\ (x = \varnothing \vee \exists y\ y \in x)$,
ce qui signifie : pour tout ensemble x, soit x est l'ensemble vide ∅, soit il existe un élément y appartenant à l'ensemble x.

Le langage de la théorie des ensembles ZFC permet de traduire toutes les formules de l'arithmétique de Peano et les axiomes de ZFC permettent de retrouver tous les axiomes de l'arithmétique de Peano.

Cette théorie des ensembles permet cependant de traiter de l'infini et de le manipuler, ce que l'arithmétique de Peano ne permet pas directement. Comme pour l'arithmétique, on utilise toutes sortes de raccourcis et de symboles ajoutés pour disposer d'un langage praticable. Dans l'absolu, cependant, toutes les mathématiques peuvent s'exprimer uniquement avec le langage réduit énuméré ici pour ZFC.


Giuseppe Peano
(1858 - 1932)


Abraham Fraenkel
(1891 - 1965)


Ernst Zermelo
(1871 - 1953)

Photos en domaine public ; schéma d'après https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_prédicats