

2

LANGAGES LOGIQUES

Pour formaliser une théorie mathématique, ce qui est indispensable afin d'éviter les paradoxes comme le paradoxe de Berry, il faut préciser le langage qui permet d'écrire les énoncés de la théorie (hypothèses, théorèmes, démonstrations, etc.). On s'appuie le plus souvent sur le calcul des prédicats du premier ordre que nous allons examiner.

L'arithmétique de Peano utilise un langage dont les symboles sont :

$() 0 = s \forall \exists \wedge \vee \neg \Rightarrow \Leftarrow \Rightarrow + x y z \dots$

Pour la liste des variables, on peut se ramener à deux symboles si on veut vraiment économiser les symboles : on utilise x et y , et les noms de variables sont $x, x', x'', x''' \dots$. Pour plus de lisibilité, nous garderons $x, y, z \dots$

Voici un exemple de formule de l'arithmétique de Peano, qui est aussi un axiome de cette théorie :

$\forall x (x = 0 \vee \exists y x = s(y))$

Elle signifie : pour tout nombre x , $x = 0$ ou il existe un nombre y tel que x est le successeur de y .

La fonction $s(x)$, « successeur de x », désignera 32 si l'on prend $x = 31$.

Si l'on en reste au langage strict de la théorie, les entiers sont représentés par $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0)))$, etc., mais bien

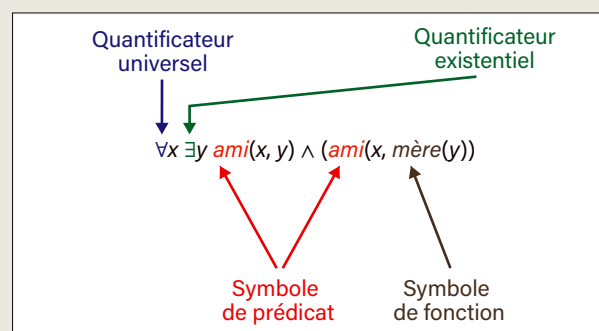
sûr, en pratique, on introduit des raccourcis de notation et on écrit $0, 1, 2, \dots$

En plus de la définition stricte de ce que sont les formules de la théorie, on fixe aussi les axiomes de la théorie et les règles permettant de déduire de nouvelles formules à partir des axiomes ou de formules déjà démontrées. Ces règles de démonstration sont les mêmes pour toutes les théories exprimées dans le calcul des prédicats du premier ordre.

Venons-en à la notion de prédicat. En logique, un prédicat est une propriété dont la vérité dépend d'une ou plusieurs variables ; selon les objets qu'on substitue aux variables, elle devient vraie ou fausse.

Dans la figure ci-dessus, le prédicat $ami(x, y)$ sera vrai pour $x = \text{Jean}$ et $y = \text{Jeanne}$ si « Jean est ami de Jeanne ». Le prédicat $nombre\ entier(x)$ sera vrai pour $x = 4$, et sera faux pour $x = \pi$.

Le calcul des prédicats du premier ordre est la logique qui permet de combiner des prédicats et de les manipuler en utilisant des opérations logiques (comme le « et », le « ou » etc.) et des quantificateurs comme $\forall$ (« quel que soit ») et $\exists$ (« il existe »). Le calcul



des prédicats du premier ordre permet aussi, à l'aide de symboles de fonction, de transformer des objets. La fonction $mère(x)$ pour $x = \text{Jeanne}$ désignera Lucie si « Lucie est la mère de Jeanne ». L'exemple de formule du calcul des prédicats du premier ordre donné sur la figure est : $\forall x \exists y \text{ami}(x, y) \wedge \text{ami}(x, \text{mère}(y))$. La formule signifie : « Pour tout x , il existe un y tel que x est ami de y , et x est ami de la mère de y ». Il n'est pas certain que la phrase soit vraie !

Le calcul des prédicats du second ordre est plus général et permet de quantifier sur les prédicats comme dans l'exemple de formule vraie suivante : $\forall P \forall x \forall y (x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)$

qui signifie que pour tout prédicat P , pour tout x et pour tout y , ($x = y$ et $P(x)$) entraîne $P(y)$.

Dans le cas de la théorie des ensembles ZFC (pour « Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix »), les symboles de base sont les mêmes sauf que $0, s$ et $+$ sont remplacés par $\emptyset$ et $\in$.

Une formule de la théorie des ensembles est par exemple :

$\forall x (x = \emptyset \vee \exists y y \in x)$, ce qui signifie : pour tout ensemble x , soit x est l'ensemble vide $\emptyset$, soit il existe un élément y appartenant à l'ensemble x .

Le langage de la théorie des ensembles ZFC permet de traduire toutes les formules de l'arithmétique de Peano et les axiomes de ZFC permettent de retrouver tous les axiomes de l'arithmétique de Peano.

Cette théorie des ensembles permet cependant de traiter de l'infini et de le manipuler, ce que l'arithmétique de Peano ne permet pas directement. Comme pour l'arithmétique, on utilise toutes sortes de raccourcis et de symboles ajoutés pour disposer d'un langage praticable. Dans l'absolu, cependant, toutes les mathématiques peuvent s'exprimer uniquement avec le langage réduit énuméré ici pour ZFC.



Giuseppe Peano
(1858 - 1932)



Abraham Fraenkel
(1891 - 1965)



Ernst Zermelo
(1871 - 1953)