2 LANGAGES LOGIQUES

Pour formaliser une théorie mathématique, ce qui est indispensable afin d'éviter les paradoxes comme le paradoxe de Berry, il faut préciser le langage qui permet d'écrire les énoncés de la théorie (hypothèses, théorèmes, démonstrations, etc.).
On s'appuie le plus souvent sur le calcul des prédicats du premier ordre que nous allons examiner.

L'arithmétique de Peano utilise un langage dont les symboles sont :
( ) 0 = *s* ∀ ∃ ∧ ∨ ¬ ⇔ ⇒ + *x y z* ...

Pour la liste des variables, on peut se ramener à deux symboles si on veut vraiment économiser les symboles : on utilise *x* et ', et les noms de variables sont *x*, *x*', *x*'', *x*'''... Pour plus de lisibilité, nous garderons *x*, *y*, *z*...

Voici un exemple de formule de l'arithmétique de Peano, qui est aussi un axiome de cette théorie :
$\forall x\ (x = 0 \vee \exists y\ x = s(y))$
Elle signifie : pour tout nombre *x*, *x* = 0 ou il existe un nombre *y* tel que *x* est le successeur de *y*.
La fonction *s*(*x*), « successeur de *x* », désignera 32 si l'on prend *x* = 31.

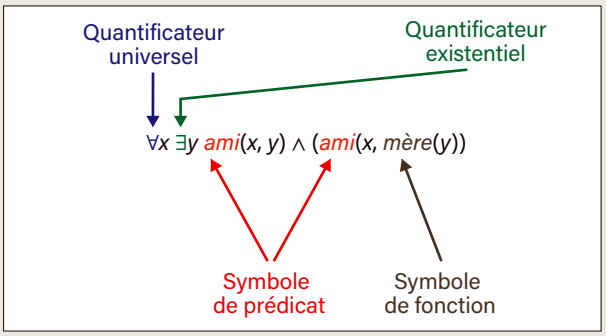
Si l'on en reste au langage strict de la théorie, les entiers sont représentés par 0, *s*(0), *s*(*s*(0)), *s*(*s*(*s*(0))), etc., mais bien sûr, en pratique, on introduit des raccourcis de notation et on écrit 0, 1, 2, ...

En plus de la définition stricte de ce que sont les formules de la théorie, on fixe aussi les axiomes de la théorie et les règles permettant de déduire de nouvelles formules à partir des axiomes ou de formules déjà démontrées. Ces règles de démonstration sont les mêmes pour toutes les théories exprimées dans le calcul des prédicats du premier ordre.

Venons-en à la notion de prédicat. En logique, un prédicat est une propriété dont la vérité dépend d'une ou plusieurs variables ; selon les objets qu'on substitue aux variables, elle devient vraie ou fausse.

Dans la figure ci-dessus, le prédicat *ami*(*x*, *y*) sera vrai pour *x* = Jean et *y* = Jeanne si « Jean est ami de Jeanne ». Le prédicat *nombre entier*(*x*) sera vrai pour *x* = 4, et sera faux pour *x* = π.

Le calcul des prédicats du premier ordre est la logique qui permet de combiner des prédicats et de les manipuler en utilisant des opérations logiques (comme le « et », le « ou » etc.) et des quantificateurs comme ∀ (« quel que soit ») et ∃ (« il existe »). Le calcul des prédicats du premier ordre permet aussi, à l'aide de symboles de fonction, de transformer des objets. La fonction *mère*(*x*) pour *x* = Jeanne désignera Lucie si « Lucie est la mère de Jeanne ». L'exemple de formule du calcul des prédicats du premier ordre donné sur la figure est :
$\forall x\ \exists y\ ami(x, y) \wedge ami(x, mère(y))$
La formule signifie :
« Pour tout *x*, il existe un *y* tel que *x* est ami de *y*, et *x* est ami de la mère de *y* ». Il n'est pas certain que la phrase soit vraie !



Le calcul des prédicats du second ordre est plus général et permet de quantifier sur les prédicats comme dans l'exemple de formule vraie suivante :
$\forall P\ \forall x\ \forall y\ (x = y \wedge P(x)) \Rightarrow P(y)$
qui signifie que pour tout prédicat P, pour tout *x* et pour tout *y*, (*x* = *y* et P(*x*)) entraîne P(*y*).

Dans le cas de la théorie des ensembles ZFC (pour « Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix »), les symboles de base sont les mêmes sauf que 0, *s* et + sont remplacés par ∅ et ∈.

Une formule de la théorie des ensembles est par exemple :
$\forall x\ (x = \varnothing \vee \exists y\ y \in x)$,
ce qui signifie : pour tout ensemble *x*, soit *x* est l'ensemble vide ∅, soit il existe un élément *y* appartenant à l'ensemble *x*.

Le langage de la théorie des ensembles ZFC permet de traduire toutes les formules de l'arithmétique de Peano et les axiomes de ZFC permettent de retrouver tous les axiomes de l'arithmétique de Peano.

Cette théorie des ensembles permet cependant de traiter de l'infini et de le manipuler, ce que l'arithmétique de Peano ne permet pas directement. Comme pour l'arithmétique, on utilise toutes sortes de raccourcis et de symboles ajoutés pour disposer d'un langage praticable. Dans l'absolu, cependant, toutes les mathématiques peuvent s'exprimer uniquement avec le langage réduit énuméré ici pour ZFC.


Giuseppe Peano
(1858 - 1932)


Abraham Fraenkel
(1891 - 1965)


Ernst Zermelo
(1871 - 1953)

Photos en domaine public ; schéma d'après https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_prédicats

3 SÉMANTIQUE ET SYNTAXE

En logique, chaque théorie comporte deux faces, l'une dite « sémantique », l'autre dite « syntaxique ».

Une théorie est définie par des formules dénommées « axiomes » que l'on décrète vraies. Ces formules sont des suites de symboles envisageables sous deux aspects.

1) On peut interpréter les axiomes comme les propriétés des objets et des structures traitées par la théorie.

Exemple. Considérons deux prédicats P(x) et I(x) et une fonction $s(x)$. P(x) signifierait « x est pair » et I(x) « x est impair ». La fonction $s(x)$ pourrait désigner l'entier qui vient après x, c'est-à-dire $x + 1$. Pour que la théorie soit utile, il faut indiquer des propriétés reliant les prédicats et les fonctions. Dans notre exemple, prenons les axiomes : $\forall x\ \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{I}(s(x))$ et $\forall x\ \mathrm{I}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(s(x))$.

Si les objets de la théorie sont les entiers et les interprétations de P(x) et I(x) sont les propriétés « être pair » et « être impair », et celle de la fonction $s(x)$ est la fonction « successeur », alors les axiomes sont vrais. Un modèle possible de la théorie est une telle interprétation des symboles de la théorie compatible avec les axiomes.

Malheureusement, d'autres interprétations sont compatibles avec les deux axiomes envisagés. Si l'on prend les nombres réels non nuls pour objets, que l'on considère que P(x) signifie « x est positif », et I(x) « x est négatif », et que pour $s(x)$ on prend $s(x) = -x$, alors les axiomes sont encore vrais pour cette structure.

Nos axiomes ne sont pas assez nombreux pour forcer l'interprétation qu'on avait envisagée. Réfléchir aux interprétations possibles d'une théorie est l'objectif de la théorie des modèles, qui est le côté sémantique de la logique mathématique.

2) On peut aussi regarder les axiomes comme de simples suites de symboles et, en utilisant des règles de manipulation entre suites de symboles, on peut essayer de déduire d'autres formules des axiomes. De $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$, on déduira par exemple $A \Rightarrow C$ sans avoir à chercher à comprendre ce que cela signifie.

Dans l'exemple donné plus haut, en utilisant les règles de déduction du calcul des prédicats, on déduira par exemple que : $\forall x\ \mathrm{P}(x) \Rightarrow \mathrm{P}(s(s(x)))$.

Lier le côté sémantique et le côté syntaxique de la logique est un objectif central : si l'on parvient à le faire, cela ramène des affirmations sur des structures à des affirmations sur des symboles et des manipulations de symboles, ce qui est moins abstrait et même presque matériel.

Dans le cas du calcul des prédicats du premier ordre, Kurt Gödel a établi que les formules qui sont vraies dans tous les modèles des axiomes d'une théorie sont exactement les mêmes que les formules qu'on peut déduire des axiomes. Il y a équivalence entre sémantique et syntaxe.

Cette propriété de complétude du calcul des prédicats du premier ordre a pour conséquence que, le plus souvent, on souhaite formaliser les théories dans ce cadre logique. Aussi bien l'arithmétique de Peano que la théorie ZFC des ensembles sont effectivement modélisées dans ce cadre.

conséquence qu'une théorie est contradictoire si et seulement si elle ne possède aucun modèle. « Être non contradictoire » et « posséder des modèles » sont équivalents. Ce théorème met en relation une notion qualifiée de « sémantique », la notion de formule vraie, et une notion liée seulement à la manipulation de symboles, la notion de « démontrable à partir des axiomes et des règles usuelles de manipulations des formules », qui est une notion « syntaxique ».

Le calcul des prédicats du second ordre permet d'envisager des formules où l'on quantifie sur les prédicats comme dans cette formule :

$$\forall \mathrm{P}\ \forall x\ \forall y\ (x = y) \Rightarrow (\mathrm{P}(x) \Leftrightarrow \mathrm{P}(y))$$

Malheureusement, il n'existe pas de théorème de complétude pour cette logique du second ordre ; autrement dit, on ne connaît pas de systèmes d'axiomes logiques qui captent « syntaxiquement » la notion de formule vraie de cette logique élargie et on démontre même qu'il ne peut pas en exister. Pour cette logique, on ne fera jamais correspondre la notion sémantique de formule vraie avec une notion syntaxique de formule démontrable.

Seule la logique du calcul des prédicats du premier ordre est donc vraiment satisfaisante pour servir de fondement aux diverses théories mathématiques et en particulier à la théorie des ensembles ZFC, qui est une théorie formulée dans le cadre du calcul des prédicats du premier ordre, comme l'est aussi l'arithmétique de Peano.

UN PARADOXE VRAIMENT TROUBLANT

Une fois admise la nécessité de formuler les théories mathématiques dans le calcul des prédicats du premier ordre, survient un problème gênant provenant du théorème de Löwenheim-Skolem. Ce problème porte le nom de « paradoxe de Skolem » ; le voici. La théorie des ensembles ZFC démontre qu'il existe des ensembles non dénombrables (d'un type d'infini plus gros que celui des entiers) et que l'ensemble des nombres réels est un tel infini non dénombrable. Comment cela est-il possible puisque le théorème de Löwenheim-Skolem nous dit que si ZFC possède des modèles (et l'on espère bien que c'est le cas car, sinon, elle est contradictoire et inutile), alors ZFC possède des modèles dénombrables ?

Pour un tel modèle dénombrable de ZFC, les éléments de base du modèle peuvent être numérotés sans répétition $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ et sans en oublier aucun. Les objets qui représentent des nombres réels dans le modèle sont ceux d'une sous-liste de cette liste et constituent donc un ensemble dénombrable. Est-ce une contradiction avec l'affirmation qu'on démontre dans ZFC que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable ? Non,