

3

SÉMANTIQUE ET SYNTAXE

En logique, chaque théorie comporte deux faces, l'une dite « sémantique », l'autre dite « syntaxique ».

Une théorie est définie par des formules dénommées « axiomes » que l'on décrète vraies. Ces formules sont des suites de symboles envisageables sous deux aspects.

1) On peut interpréter les axiomes comme les propriétés des objets et des structures traitées par la théorie.

Exemple. Considérons deux prédicats $P(x)$ et $I(x)$ et une fonction $s(x)$. $P(x)$ signifierait « x est pair » et $I(x)$ « x est impair ». La fonction $s(x)$ pourrait désigner l'entier qui vient après x , c'est-à-dire $x + 1$. Pour que la théorie soit utile, il faut indiquer des propriétés reliant les prédicats et les fonctions. Dans notre exemple, prenons les axiomes : $\forall x P(x) \Rightarrow I(s(x))$ et $\forall x I(x) \Rightarrow P(s(x))$.

Si les objets de la théorie sont les entiers et les interprétations de $P(x)$ et $I(x)$ sont les propriétés « être pair » et « être impair », et celle de la fonction $s(x)$ est la fonction « successeur », alors les axiomes sont vrais. Un modèle possible de la théorie est une telle interprétation des symboles de la théorie compatible avec les axiomes.

Malheureusement, d'autres interprétations sont compatibles avec les deux axiomes envisagés. Si l'on prend les nombres réels non nuls pour objets, que l'on considère que $P(x)$ signifie « x est positif », et que pour $s(x)$ on prend $s(x) = -x$, alors les axiomes sont encore vrais pour cette structure.

Nos axiomes ne sont pas assez nombreux pour forcer l'interprétation qu'on avait

envisagée. Réfléchir aux interprétations possibles d'une théorie est l'objectif de la théorie des modèles, qui est le côté sémantique de la logique mathématique.

2) On peut aussi regarder les axiomes comme de simples suites de symboles et, en utilisant des règles de manipulation entre suites de symboles, on peut essayer de déduire d'autres formules des axiomes. De $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow C$, on déduira par exemple $A \Rightarrow C$ sans avoir à chercher à comprendre ce que cela signifie.

Dans l'exemple donné plus haut, en utilisant les règles de déduction du calcul des prédicats, on déduira par exemple que : $\forall x P(x) \Rightarrow P(s(s(x)))$.

Lier le côté sémantique et le côté syntaxique de la logique est un objectif central : si l'on parvient à le faire, cela ramène des affirmations sur des structures à des affirmations sur des symboles et des manipulations de symboles, ce qui est moins abstrait et même presque matériel.

Dans le cas du calcul des prédicats du premier ordre, Kurt Gödel a établi que les formules qui sont vraies dans tous les modèles des axiomes d'une théorie sont exactement les mêmes que les formules qu'on peut déduire des axiomes. Il y a équivalence entre sémantique et syntaxe.

Cette propriété de complétude du calcul des prédicats du premier ordre a pour conséquence que, le plus souvent, on souhaite formaliser les théories dans ce cadre logique. Aussi bien l'arithmétique de Peano que la théorie ZFC des ensembles sont effectivement modélisées dans ce cadre.

conséquence qu'une théorie est contradictoire si et seulement si elle ne possède aucun modèle. « Être non contradictoire » et « posséder des modèles » sont équivalents. Ce théorème met en relation une notion qualifiée de « sémantique », la notion de formule vraie, et une notion liée seulement à la manipulation de symboles, la notion de « démontrable à partir des axiomes et des règles usuelles de manipulations des formules », qui est une notion « syntaxique ».

Le calcul des prédicats du second ordre permet d'envisager des formules où l'on quantifie sur les prédicats comme dans cette formule :

$$\forall P \forall x \forall y (x = y) \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(y))$$

Malheureusement, il n'existe pas de théorème de complétude pour cette logique du second ordre ; autrement dit, on ne connaît pas de systèmes d'axiomes logiques qui captent « syntaxiquement » la notion de formule vraie de cette logique élargie et on démontre même qu'il ne peut pas en exister. Pour cette logique, on ne fera jamais correspondre la notion sémantique de formule vraie avec une notion syntaxique de formule démontrable.

Seule la logique du calcul des prédicats du premier ordre est donc vraiment satisfaisante pour servir de fondement aux diverses théories mathématiques et en particulier à la théorie des ensembles ZFC, qui est une théorie formulée dans le cadre du calcul des prédicats du premier ordre, comme l'est aussi l'arithmétique de Peano.

UN PARADOXE VRAIMENT TROUBLANT

Une fois admise la nécessité de formuler les théories mathématiques dans le calcul des prédicats du premier ordre, survient un problème gênant provenant du théorème de Löwenheim-Skolem. Ce problème porte le nom de « paradoxe de Skolem » ; le voici. La théorie des ensembles ZFC démontre qu'il existe des ensembles non dénombrables (d'un type d'infini plus gros que celui des entiers) et que l'ensemble des nombres réels est un tel infini non dénombrable. Comment cela est-il possible puisque le théorème de Löwenheim-Skolem nous dit que si ZFC possède des modèles (et l'on espère bien que c'est le cas car, sinon, elle est contradictoire et inutile), alors ZFC possède des modèles dénombrables ?

Pour un tel modèle dénombrable de ZFC, les éléments de base du modèle peuvent être numérotés sans répétition $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$ et sans en oublier aucun. Les objets qui représentent des nombres réels dans le modèle sont ceux d'une sous-liste de cette liste et constituent donc un ensemble dénombrable. Est-ce une contradiction avec l'affirmation qu'on démontre dans ZFC que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable ? Non,

car la notion d'ensemble dénombrable interne à ZFC n'est pas celle de la métathéorie. Quand le théorème de Löwenheim-Skolem affirme que ZFC possède des modèles dénombrables, la notion de dénombrable dont il s'agit est celle de la métathéorie. Quand on affirme que ZFC démontre que les nombres réels ne sont pas dénombrables, il s'agit de la notion interne à ZFC. Les deux notions ne coïncident pas! La notion de dénombrabilité n'est pas absolue!

Ainsi, cette opposition entre deux notions de dénombrabilité n'en est pas une au sens strict: on n'en tire aucune contradiction si on fait la distinction entre théorie et métathéorie. Il faut cependant admettre que c'est un peu ennuyeux. La relativité du concept d'ensemble dénombrable ne fait-elle pas douter de la solidité générale du concept d'ensemble non dénombrable? Cela a-t-il un lien avec le fait qu'en physique la notion d'ensemble non dénombrable ne joue jamais un rôle direct et important? Bien sûr, les philosophes se sont intéressés à ces problèmes. De nombreux articles ont été publiés et continuent à l'être sur le sujet, dont par exemple une thèse soutenue en 2000 consacrée au paradoxe de Skolem à l'université de Californie à Los Angeles (voir la bibliographie).

UN RAISONNEMENT TROP FACILE

Joel Hamkins rappelle que la notion de définissabilité est une notion métathéorique et que l'oublier conduit à des énoncés injustifiés. Le raisonnement suivant n'est pas correct:

«Puisque les nombres réels sont non dénombrables et qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable de définitions possibles avec un alphabet fini (ce qui est le cas de la théorie des ensembles), alors c'est qu'il existe des nombres réels non définissables».

Rien n'est faux dans les prémisses du raisonnement, mais la conclusion n'est pas justifiée car elle assimile deux notions de dénombrabilité, la notion interne (pour affirmer que les nombres réels sont non dénombrables) et la notion externe (pour affirmer que les définitions possibles sont dénombrables).

On ne peut pas prouver aussi simplement que, dans tout modèle de la théorie des ensembles, il y a des nombres réels non définissables avec les formules de la théorie des ensembles. Et d'ailleurs, c'est faux: il existe des modèles de la théorie des ensembles où tous les nombres réels, et même tous les ensembles, sont définissables dans le sens expliqué plus haut: à chaque nombre réel r du modèle considéré correspond une formule $P(x)$ qui est vérifiée par r et dont ZFC démontre qu'il est le seul à la vérifier.

Joel Hamkins ne prétend pas être le premier à noter l'existence de tels modèles, et

La notion de dénombrabilité n'est pas absolue

rappelle que le logicien britannique John Myhill a démontré dès 1952 un résultat dans ce sens. Myhill terminait son article par la remarque lucide montrant qu'il comprenait très bien la portée des résultats de son travail: «On entend souvent dire que, puisqu'il y a un nombre non dénombrable d'ensembles et seulement une infinité dénombrable de noms, il doit donc y avoir des ensembles sans nom. Cet argument est fallacieux, selon ce qu'on vient de voir.»

LES FONCTIONS INVISIBLES

Précisons un peu ce qui se passe dans le cas des modèles dénombrables de ZFC. Quand on affirme que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable dans ZFC, on affirme qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Quand on affirme « $\mathbb{R}$ est dénombrable dans un certain modèle de ZFC», cela signifie que pour la métathéorie il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et les réels du modèle.

Qui a raison? C'est la métathéorie: les réels du modèle sont bien dénombrables, et si la théorie en interne ne le voit pas, c'est parce qu'il lui manque des fonctions, et en particulier celle qui établit une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. La théorie est aveugle à certaines fonctions. Le plus extraordinaire dans une telle situation est que la façon dont le modèle ignore l'existence de cette fonction et de bien d'autres objets que la métathéorie connaît, est qu'elle le fait d'une façon totalement cohérente et compatible avec tous les axiomes de ZFC. Le modèle dénombrable de ZFC est une sorte de faux univers ensembliste, mais il simule tellement bien le véritable univers ensembliste de la métathéorie qu'il vérifie tout ce qu'on attend et qui est formulable dans les termes du vocabulaire de ZFC.

Il se produit bien d'autres choses de cette nature confirmant que, pour éviter les contradictions liées à la notion de définissabilité et dont le paradoxe de Berry nous avertit du danger, il faut soigneusement ne pas mélanger théorie et métathéorie, même si cela amène à soupçonner que certaines notions des mathématiques liées à l'infini, en particulier la notion d'ensemble non dénombrable, n'ont pas la clarté que les mathématiques usuelles prétendent. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Patarin, **Théorie des ensembles et logique mathématique : Des infinis mathématiques aux théorèmes de Gödel**, Ellipse, 2020.

J. D. Hamkins et C. Leahy, **Algebraicity and implicit definability in set theory**, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 57(3), pp. 431-439, 2016.

T. Bays, **Skolem's Paradox**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014 : <https://plato.stanford.edu/entries/paradox-skolem/>

J. D. Hamkins et al., **Pointwise definable models of set theory**, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 78(1), pp. 139-156, 2013.

T. Bays, **Reflexion on the Skolem's Paradox**, thèse, UCLA, 2000 : <https://www3.nd.edu/~tbays/papers/pthesis.pdf>

J. Myhill, **The hypothesis that all classes are nameable**, *PNAS*, vol. 38(11), pp. 979-981, 1952.