

car la notion d'ensemble dénombrable interne à ZFC n'est pas celle de la métathéorie. Quand le théorème de Löwenheim-Skolem affirme que ZFC possède des modèles dénombrables, la notion de dénombrable dont il s'agit est celle de la métathéorie. Quand on affirme que ZFC démontre que les nombres réels ne sont pas dénombrables, il s'agit de la notion interne à ZFC. Les deux notions ne coïncident pas ! La notion de dénombrabilité n'est pas absolue !

Ainsi, cette opposition entre deux notions de dénombrabilité n'en est pas une au sens strict : on n'en tire aucune contradiction si on fait la distinction entre théorie et métathéorie. Il faut cependant admettre que c'est un peu ennuyeux. La relativité du concept d'ensemble dénombrable ne fait-elle pas douter de la solidité générale du concept d'ensemble non dénombrable ? Cela a-t-il un lien avec le fait qu'en physique la notion d'ensemble non dénombrable ne joue jamais un rôle direct et important ? Bien sûr, les philosophes se sont intéressés à ces problèmes. De nombreux articles ont été publiés et continuent à l'être sur le sujet, dont par exemple une thèse soutenue en 2000 consacrée au paradoxe de Skolem à l'université de Californie à Los Angeles (voir la bibliographie).

UN RAISONNEMENT TROP FACILE

Joel Hamkins rappelle que la notion de définissabilité est une notion métathéorique et que l'oublier conduit à des énoncés injustifiés. Le raisonnement suivant n'est pas correct :

« Puisque les nombres réels sont non dénombrables et qu'il n'y a qu'une infinité dénombrable de définitions possibles avec un alphabet fini (ce qui est le cas de la théorie des ensembles), alors c'est qu'il existe des nombres réels non définissables ».

Rien n'est faux dans les prémisses du raisonnement, mais la conclusion n'est pas justifiée car elle assimile deux notions de dénombrabilité, la notion interne (pour affirmer que les nombres réels sont non dénombrables) et la notion externe (pour affirmer que les définitions possibles sont dénombrables).

On ne peut pas prouver aussi simplement que, dans tout modèle de la théorie des ensembles, il y a des nombres réels non définissables avec les formules de la théorie des ensembles. Et d'ailleurs, c'est faux : il existe des modèles de la théorie des ensembles où tous les nombres réels, et même tous les ensembles, sont définissables dans le sens expliqué plus haut : à chaque nombre réel r du modèle considéré correspond une formule $P(x)$ qui est vérifiée par r et dont ZFC démontre qu'il est le seul à la vérifier.

Joel Hamkins ne prétend pas être le premier à noter l'existence de tels modèles, et

La notion de dénombrabilité n'est pas absolue

rappelle que le logicien britannique John Myhill a démontré dès 1952 un résultat dans ce sens. Myhill terminait son article par la remarque lucide montrant qu'il comprenait très bien la portée des résultats de son travail : « On entend souvent dire que, puisqu'il y a un nombre non dénombrable d'ensembles et seulement une infinité dénombrable de noms, il doit donc y avoir des ensembles sans nom. Cet argument est fallacieux, selon ce qu'on vient de voir. »

LES FONCTIONS INVISIBLES

Précisons un peu ce qui se passe dans le cas des modèles dénombrables de ZFC. Quand on affirme que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable dans ZFC, on affirme qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Quand on affirme « $\mathbb{R}$ est dénombrable dans un certain modèle de ZFC », cela signifie que pour la métathéorie il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et les réels du modèle.

Qui a raison ? C'est la métathéorie : les réels du modèle sont bien dénombrables, et si la théorie en interne ne le voit pas, c'est parce qu'il lui manque des fonctions, et en particulier celle qui établit une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. La théorie est aveugle à certaines fonctions. Le plus extraordinaire dans une telle situation est que la façon dont le modèle ignore l'existence de cette fonction et de bien d'autres objets que la métathéorie connaît, est qu'elle le fait d'une façon totalement cohérente et compatible avec tous les axiomes de ZFC. Le modèle dénombrable de ZFC est une sorte de faux univers ensembliste, mais il simule tellement bien le véritable univers ensembliste de la métathéorie qu'il vérifie tout ce qu'on attend et qui est formulable dans les termes du vocabulaire de ZFC.

Il se produit bien d'autres choses de cette nature confirmant que, pour éviter les contradictions liées à la notion de définissabilité et dont le paradoxe de Berry nous avertit du danger, il faut soigneusement ne pas mélanger théorie et métathéorie, même si cela amène à soupçonner que certaines notions des mathématiques liées à l'infini, en particulier la notion d'ensemble non dénombrable, n'ont pas la clarté que les mathématiques usuelles prétendent. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Patarin, **Théorie des ensembles et logique mathématique : Des infinis mathématiques aux théorèmes de Gödel**, Ellipse, 2020.

J. D. Hamkins et C. Leahy, **Algebraicity and implicit definability in set theory**, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 57(3), pp. 431-439, 2016.

T. Bays, **Skolem's Paradox**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2014 : <https://plato.stanford.edu/entries/paradox-skolem/>

J. D. Hamkins et al., **Pointwise definable models of set theory**, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 78(1), pp. 139-156, 2013.

T. Bays, **Reflexion on the Skolem's Paradox**, thèse, UCLA, 2000 : <https://www3.nd.edu/~tbays/papers/pthesis.pdf>

J. Myhill, **The hypothesis that all classes are nameable**, *PNAS*, vol. 38(11), pp. 979-981, 1952.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à Pour la Science

LE DÉSIR BLEU DU JARDINIER SATINÉ

L'un des jardins éphémères du domaine de Chaumont-sur-Loire s'inspire d'un oiseau australien et de son étrange habitude de collecter les objets bleus.

L'exemple le plus connu est le Velcro, contraction de «velours» et «crochet», dont l'idée serait venue en 1948 au Suisse George de Mestral à la vue de boules de bardane accrochées à ses vêtements. Mais le biomimétisme, c'est-à-dire s'inspirer du vivant pour innover et résoudre des problèmes, est plus ancien: ainsi, les machines volantes imaginées par Léonard de Vinci sont calquées sur l'anatomie des oiseaux. C'est que depuis près de quatre milliards d'années, le vivant, par le biais de la sélection naturelle, a eu le temps de peaufiner des solutions particulièrement efficaces et économes pour s'adapter et perdurer. Par exemple, pour la bardane, il s'agit de

s'assurer du transport de ses graines par des animaux.

Ce «laboratoire géant» qu'est la Terre offre une formidable source d'idées pour les chercheurs et les ingénieurs. Il l'est tout autant pour les jardiniers et paysagistes invités à s'emparer du thème du biomimétisme à l'occasion du Festival international des Jardins, au domaine de Chaumont-sur-Loire: vingt-quatre équipes internationales (Italie, Pays-Bas, Mexique, Suède, Chine, République tchèque...) y présentent leurs créations.

Les visiteurs découvriront comment les fils d'araignées, l'architecture des termitières, les racines du lierre, les rayures des zèbres, les feuilles de lotus, la peau

des caméléons et bien d'autres choses encore s'interprètent dans un jardin. Attardons-nous dans celui nommé «Bleu désir», conçu par Robin Abel Flosi, Johanna Bonella, Jean Robaudi, Ken Novellas et Adèle Justin. L'inspiration en est le jardinier satiné (*Ptilonorhynchus violaceus*), un oiseau australien noir aux reflets bleutés, qui est l'une des vingt espèces de passereaux dits «jardiniers».

Jardinier? C'est que lorsqu'il s'agit de séduire, le mâle déploie des trésors d'énergie et de créativité. Dans une zone dégagée des forêts qu'il habite, il confectonne ce que les ornithologues appellent un «berceau». D'abord, avec des brindilles fines et longues, l'oiseau érige une

Le jardin «Bleu désir».

