

A

CTUALITÉS

P.6 Échos des labos

P.18 Livres du mois

P.20 Disputes environnementales

P.22 Les sciences à la loupe

Quand 29 000 canards en plastique sont tombés en 1992 dans l'océan Pacifique, certains ont été retrouvés quinze ans plus tard sur les rives de l'Angleterre. Leur trajectoire était-elle prévisible ?

MATHÉMATIQUES

« OÙ VAS-TU PETIT CANARD ? », UNE QUESTION INDÉCIDABLE !



Une équipe de mathématiciens a prouvé que déterminer à long terme la trajectoire d'une particule de fluide est un problème indécidable.

Le 10 janvier 1992, pris dans une tempête sur l'océan Pacifique, un bateau perdit une partie de sa cargaison : 29 000 petits canards en plastique tombèrent à la mer et partirent à la dérive. On retrouva quelques mois plus tard certains de ces Friendly Floatees sur les rives de l'Alaska, puis d'autres au Japon. Certains traversèrent le détroit de Béring, l'océan Arctique et finirent leur périple sur les rivages de l'Angleterre en 2007, soit quinze ans plus tard. L'océanographe américain Curtis Ebbesmeyer les a rendus célèbres en les utilisant pour analyser les courants marins.

Aurait-il été possible de déterminer la trajectoire des canards depuis leur point de départ ? L'exercice est difficile. Les courants océaniques font partie de ces systèmes dont la dynamique est décrite

par les équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides ; or les solutions de ces équations sont tellement sensibles aux conditions initiales qu'il est en pratique impossible de prévoir où les courants emporteront chacun des canards. Avec trois collègues, Eva Miranda, de l'université polytechnique de Catalogne, à Barcelone, et de l'observatoire de Paris, vient de montrer que cette impossibilité est bien plus fondamentale : il s'agit d'un problème indécidable.

Les questions d'indécidabilité sont intimement liées au concept de machine de Turing. Les travaux d'Eva Miranda et ses collègues s'inscrivent en effet dans un contexte plus large : est-il possible de simuler une « machine de Turing universelle » avec des systèmes physiques ? La réponse est oui pour certains systèmes optiques ou des réseaux de neurones

artificiels. Et dès 1991, Christopher Moore, de l'institut de Santa Fe, aux États-Unis, a posé la question pour les systèmes hydrodynamiques : sont-ils assez complexes pour servir à effectuer des calculs ? C'est cette question qui vient de trouver une réponse et qui conduit à la notion d'indécidabilité dans les trajectoires des fluides.

Imaginée par le mathématicien Alan Turing en 1936, une machine de Turing est une construction abstraite qui peut effectuer des opérations élémentaires afin de réaliser un algorithme. Munie d'instructions simples, la machine prend en entrée une séquence de 0 et de 1, et, après un certain nombre d'étapes, restitue une nouvelle séquence de 0 et de 1. Il est possible d'imaginer une machine de Turing dite « universelle », qui prendrait en entrée la description de n'importe quelle machine de Turing et pourrait simuler son comportement. Une machine de Turing universelle pourrait calculer tout ce qui est calculable. Elle est dite « Turing-complète ». Cette idée a donné naissance

à la réalisation, bien concrète, elle, des ordinateurs programmables. Mais un écoulement fluide peut-il aussi simuler une machine de Turing universelle?

En 2014, cette question a pris une tout autre dimension sous l'impulsion de Terence Tao. Ce mathématicien de l'université de Californie à Los Angeles a suggéré que si un fluide est Turing-complet, il serait possible de l'utiliser pour démontrer la régularité des équations de Navier-Stokes. Ces équations, qui régissent la dynamique d'un fluide, posent en effet un problème aux mathématiciens: il n'est pas démontré qu'elles sont régulières, c'est-à-dire que leurs solutions ne divergent jamais vers des valeurs infinies – ce qui serait physiquement inacceptable. La démonstration de la régularité mathématique des équations de Navier-Stokes est d'ailleurs l'un des «sept problèmes du millénaire» listés en 2000 par l'institut Clay.

Certaines tentatives de preuve reposent sur la conservation de l'énergie. Terence Tao a voulu construire un contre-exemple à partir d'un modèle-jouet pour montrer que ce critère n'est pas suffisant. Pour cela, il a cherché à montrer que si un fluide a un comportement assez complexe pour faire des calculs et constituer une machine de Turing universelle, alors on pourrait concevoir un algorithme fluide qui conserverait l'énergie mais la concentrerait en un point de façon à obtenir une

singularité. Si, par cette approche, on parvenait à prouver qu'on aboutit parfois à des singularités en un temps fini, cela signifierait que les équations de Navier-Stokes ne sont pas régulières.

Passer d'un modèle-jouet aux vraies équations de Navier-Stokes est cependant très difficile. «En 2018, en lisant le blog de Terence Tao, j'ai réalisé qu'avec mes

Les fluides sont-ils assez complexes pour servir à effectuer des calculs?

collègues, nous avons développé des outils qui devaient nous permettre d'aborder ce problème», raconte Eva Miranda. Avec son équipe, elle a étudié le cas des équations d'Euler, qui correspondent à un cas particulier des équations de Navier-Stokes – correspondant aux fluides incompressibles et de viscosité nulle. Les chercheurs ont aussi restreint leur étude à des solutions stationnaires, c'est-à-dire indépendantes du temps. Ces chercheurs ont alors montré qu'il était possible de concevoir une machine de Turing universelle avec un tel fluide. Le système prend comme données en entrées un point de l'espace tridimensionnel. Puis la machine

de Turing suit la trajectoire du fluide passant par ce point et donne en sortie la position résultante.

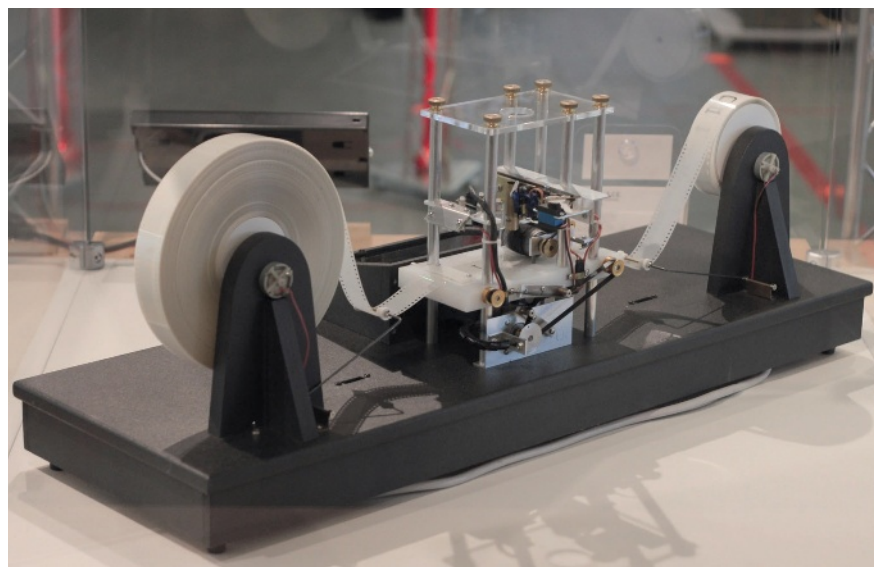
Ce résultat a une conséquence surprenante, car les machines de Turing sont associées à la notion d'indécidabilité. En 1931, le mathématicien autrichien Kurt Gödel a démontré que, dans un cadre axiomatique donné, certains énoncés mathématiques sont indécidables: il est impossible de prouver qu'ils sont vrais ou faux. Turing a transposé ce concept à certaines situations plus physiques. Il s'est intéressé au «problème de l'arrêt» qui consiste à déterminer, à partir de la description d'un programme et de ses données en entrée, si le programme terminera son calcul en un temps fini ou s'il tournera indéfiniment. Turing a démontré qu'il était impossible de concevoir un algorithme général qui résout le problème de l'arrêt quel que soit le programme donné. Le problème de l'arrêt est donc indécidable pour les machines de Turing.

Ainsi, Eva Miranda et ses collègues ayant montré que leur système fluide était capable de simuler une machine de Turing universelle, ce système doit présenter une part d'indécidabilité. Les chercheurs ont établi une correspondance précise entre le problème de l'arrêt et le calcul des trajectoires du fluide. À long terme, le comportement du fluide est donc indécidable: aucun algorithme ne peut garantir qu'une particule fluide, quelle qu'elle soit, passera ou non à un endroit donné en un temps fini.

Qu'en est-il du programme de Terence Tao pour prouver la régularité ou non des équations de Navier-Stokes? Eva Miranda et ses collègues ont montré que certains écoulements pouvaient en principe être utilisés pour concevoir une machine de Turing universelle. «Notre démonstration a un prix: elle fonctionne dans une géométrie particulière, où les distances sont déformées et qui ne correspond pas à la géométrie euclidienne de notre monde. Nous travaillons à alléger cette contrainte», souligne Eva Miranda. La conception d'une telle machine capable de concentrer de l'énergie en un point pour former des singularités dans notre monde réel reste une question ouverte... ■

Sean Bailly

R. Cardona *et al.*, *PNAS*, vol. 118(19), article e2026818118, 2021



Exemple de réalisation d'une machine de Turing. Elle lit les données sur le ruban et, selon les règles de l'algorithme implémenté, agit d'une façon spécifique.