

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DES NOMBRES PREMIERS ROBUSTES OU DÉLICATS

Manipuler les chiffres des nombres premiers est un jeu stimulant... qui réserve de nombreuses surprises.

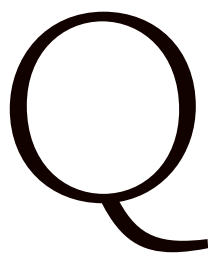
L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).



Que se passe-t-il quand on modifie les chiffres d'un nombre premier? Il peut rester premier ou devenir composé, mais ce que l'on découvre au cours de ces changements est parfois inattendu. Par exemple, changer l'ordre des chiffres du nombre premier 991 donne toujours un autre nombre premier, car 199 et 919 sont premiers. À l'opposé, d'autres opérations de changements ne donnent que des nombres composés. Ainsi, il y a 54 façons de changer un seul chiffre du nombre premier 294001, et tous ces changements donnent des nombres composés.

Ces questions sont parfois sans réponse définitive; et plusieurs découvertes conduisent à une situation étrange où l'on sait démontrer qu'une catégorie de nombres est infinie alors qu'on ne réussit pas à trouver un seul de ces nombres. Pour quiconque aime programmer, le sujet est une occasion rêvée de lancer sa machine à la poursuite de tels nombres singuliers, mais si certains apparaissent en quelques secondes, d'autres demandent plusieurs minutes de calcul, voire plusieurs heures.

UN SAUT INATTENDU

Sur la liste de courriels *Math-Fun*, les mathématiciens aiment échanger des informations à propos de questions mathématiques

amusantes... quoique parfois très difficiles. Le 24 janvier 2003, Bill Gosper, l'inventeur du célèbre lance-glisseur du *Jeu de la vie* de John Conway, fit part à la liste de son expérience suivante ayant consisté à lancer un programme de recherche des nombres premiers qui le restent toujours quand on permute leurs chiffres, nombres dénommés «nombres premiers permutable» ou «nombres premiers absolus». Il obtint rapidement une liste de 22 nombres sur l'écran de son ordinateur: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 199, 311, 337, 373, 733, 919, 991.

Le programme sembla alors s'arrêter. Mais après une minute de calcul, apparut le nombre 111111111111111111. Après un temps plus long encore, s'afficha le nombre 11111111111111111111. Le programme resta alors silencieux et fut interrompu sans qu'il ait affiché de nombres supplémentaires.

Il n'existe donc aucun nombre premier permutable entre 991 et 111111111111111111. Peut-être que plus loin, les seuls nombres premiers permutables sont tous composés uniquement de chiffres 1. L'expérience, que vous pouvez reproduire, suggère d'étudier deux séries de questions:

Série 1. Existe-t-il d'autres nombres premiers permutables composés uniquement de 1 en

base 10? On les nomme «répunits» pour la base 10. Si oui, en existe-t-il une infinité?

Série 2. Existe-t-il des nombres premiers permutable supérieurs à 991 qui ne sont pas composés que de chiffres 1? Que peut-on en savoir?

Aucune des deux séries de questions n'est parfaitement traitée!

Pour les répunits premiers, on sait démontrer (essayez, ce n'est pas très difficile) que $11...1$ (n fois le 1) ne peut être un nombre premier que si n est premier, mais que ce n'est pas suffisant, comme le montre l'exemple $111 = 3 \times 37$.

Aujourd'hui, on ne connaît que les onze répunits premiers suivants: 2 fois le 1; 19 fois le 1; puis 23, 317, 1031, 49081, 86453, 109297, 270343, 5794777, 8177207 fois le 1. Le dernier a été découvert le 8 mai 2021. On comprend pourquoi, après le nombre qui s'écrit avec 23 fois le 1, le programme de Bill Gosper ne donna rien d'autre: il n'aurait trouvé un autre répunit premier qu'en atteignant le nombre composé de 317 fois le 1, ce qui vraisemblablement ne pouvait se faire avec son programme en un temps raisonnable.

En réalité, les six derniers répunits de la liste sont seulement des nombres premiers «probables», ce qui signifie qu'on a testé leur primalité en utilisant une méthode qui donne un résultat probablement vrai avec toutefois un risque infinitésimal d'erreur. On conjecturerait qu'il n'existe qu'un nombre fini de répunits premiers en base 10, mais les dernières découvertes affaiblissent la conjecture.

Concernant la question des nombres premiers permutable supérieurs à 991 et qui ne sont pas des répunits, on a avancé, sans toutefois arriver à une réponse définitive. Les travaux de divers mathématiciens, dont Arkadii Slinko, de l'université d'Auckland, en Nouvelle-Zélande (voir la bibliographie), ont montré que:

- Puisque tout nombre qui se termine par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8 est composé, on en déduit immédiatement que tous les chiffres d'un nombre premier permutable sont pris parmi 1, 3, 7 et 9. Des raisonnements plus compliqués conduisent à d'autres précisions: tout nombre premier permutable qui n'est pas un répunit est obtenu en permutant les chiffres d'un entier de la forme $aaa...aaab$, composé de $n-1$ chiffres a et d'un chiffre b , avec a et b différents et pris parmi 1, 3, 7 et 9.

- Pour que $aaa...aaab$ soit un nombre premier permutable, (a, b) ne doit être aucun des couples suivants: (9, 7), (9, 1), (1, 7), (7, 1), (3, 9), (9, 3).

- Les nombres premiers permutables qui ne sont pas des répunits et qui sont supérieurs à 991 comportent au moins 6×10^{175} chiffres.

On conjecture donc que les nombres premiers permutable supérieurs à 991 sont tous



PORTRAIT EN NOMBRES PREMIERS

Roland Meertens, un ingénieur qui travaille en Allemagne sur des projets de voitures autonomes, a obtenu un nombre premier qui représente la Joconde. Ce nombre comporte 1 617 chiffres décimaux qui se disposent en 49 lignes de 33 chiffres produisant le portrait. Roland Meertens construit d'abord une approximation en 10 couleurs de l'image. Il assigne un chiffre à chaque couleur, ce qui donne un nombre entier N produisant

le portrait. Il modifie ensuite le nombre N aléatoirement en quelques chiffres qui ne changent pas la perception que nous avons de l'image, et il recommence jusqu'à obtenir un nombre premier. Les tests probabilistes de primalité rendent cette recherche possible rapidement. Pour plus de détails, voir : <http://www.pinchofintelligence.com/painting-by-prime-number/> <http://archive.bridgesmathart.org/2016/bridges2016-359.pdf>

