base 10? On les nomme «répunits» pour la base 10. Si oui, en existe-t-il une infinité?
Série 2. Existe-t-il des nombres premiers permutables supérieurs à 991 qui ne sont pas composés que de chiffres 1? Que peut-on en savoir?

Aucune des deux séries de questions n'est parfaitement traitée!

Pour les répunits premiers, on sait démontrer (essayez, ce n'est pas très difficile) que 11...1 (n fois le 1) ne peut être un nombre premier que si n est premier, mais que ce n'est pas suffisant, comme le montre l'exemple $111 = 3 \times 37$.

Aujourd'hui, on ne connaît que les onze répunits premiers suivants: 2 fois le 1; 19 fois le 1; puis 23, 317, 1031, 49081, 86453, 109297, 270343, 5794777, 8177207 fois le 1. Le dernier a été découvert le 8 mai 2021. On comprend pourquoi, après le nombre qui s'écrit avec 23 fois le 1, le programme de Bill Gosper ne donna rien d'autre: il n'aurait trouvé un autre répunit premier qu'en atteignant le nombre composé de 317 fois le 1, ce qui vraisemblablement ne pouvait se faire avec son programme en un temps raisonnable.

En réalité, les six derniers répunits de la liste sont seulement des nombres premiers «probables», ce qui signifie qu'on a testé leur primalité en utilisant une méthode qui donne un résultat probablement vrai avec toutefois un risque infinitésimal d'erreur. On conjecturait qu'il n'existe qu'un nombre fini de répunits premiers en base 10, mais les dernières découvertes affaiblissent la conjecture.

Concernant la question des nombres premiers permutables supérieurs à 991 et qui ne sont pas des répunits, on a avancé, sans toutefois arriver à une réponse définitive. Les travaux de divers mathématiciens, dont Arkadii Slinko, de l'université d'Auckland, en Nouvelle-Zélande (*voir la bibliographie*), ont montré que:

– Puisque tout nombre qui se termine par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8 est composé, on en déduit immédiatement que tous les chiffres d'un nombre premier permutable sont pris parmi 1, 3, 7 et 9. Des raisonnements plus compliqués conduisent à d'autres précisions: tout nombre premier permutable qui n'est pas un répunit est obtenu en permutant les chiffres d'un entier de la forme *aaa...aaab*, composé de $n-1$ chiffres a et d'un chiffre b, avec a et b différents et pris parmi 1, 3, 7 et 9.

– Pour que *aaa...aaab* soit un nombre premier permutable, (a, b) ne doit être aucun des couples suivants: (9, 7), (9, 1), (1, 7), (7, 1), (3, 9), (9, 3).

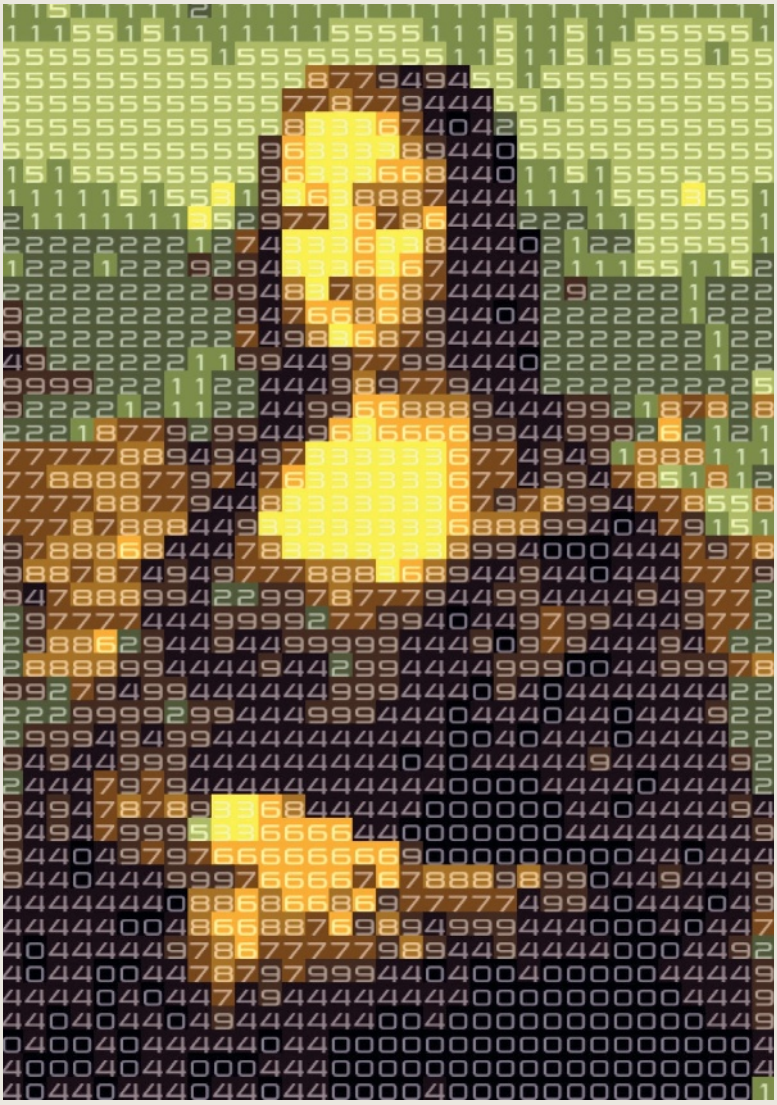
- Les nombres premiers permutables qui ne sont pas des répunits et qui sont supérieurs à 991 comportent au moins 6×10^{175} chiffres.

On conjecture donc que les nombres premiers permutables supérieurs à 991 sont tous

1

PORTRAIT EN NOMBRES PREMIERS

Roland Meertens, un ingénieur qui travaille en Allemagne sur des projets de voitures autonomes, a obtenu un nombre premier qui représente la Joconde. Ce nombre comporte 1 617 chiffres décimaux qui se disposent en 49 lignes de 33 chiffres produisant le portrait. Roland Meertens construit d'abord une approximation en 10 couleurs de l'image. Il assigne un chiffre à chaque couleur, ce qui donne un nombre entier *N* produisant le portrait. Il modifie ensuite le nombre *N* aléatoirement en quelques chiffres qui ne changent pas la perception que nous avons de l'image, et il recommence jusqu'à obtenir un nombre premier. Les tests probabilistes de primalité rendent cette recherche possible rapidement. Pour plus de détails, voir : http://www.pinchofintelligence.com/painting-by-prime-number/ http://archive.bridgesmathart.org/2016/bridges2016-359.pdf



© Roland Meertens

des répunits, mais, là encore, on attend une démonstration complète. En regroupant cette conjecture et celle sur les répunits en base 10, on conjecture donc tout simplement qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers permutables et que ce sont les vingt-deux jusqu'à 991 et les dix répunits supérieurs à 991 connus.

DANS LES AUTRES BASES

La notion de nombre premier permutable est liée à la base de numération décimale et peut donc être envisagée dans d'autres bases. Convenons de nommer «nombres premiers *b*-permutables» les nombres premiers qui, quand on permute les chiffres de leur écriture en base *b*, restent premiers.

Une petite exploration numérique avec un ordinateur nous donne des débuts de listes pour ces nombres *b*-permutables.

Pour la base 2, en calculant par exemple jusqu'à 10000, on trouve quatre nombres premiers 2-permutables:

- 3, dont l'écriture en base 2 est 11_2, (l'indice derrière un nombre précise la base dans laquelle on l'écrit quand ce n'est pas la base 10)
- $7 = 111_2$
- $31 = 11111_2$
- $127 = 1111111_2$
- $8191 = 1111111111111_2$

La situation est plus simple que pour la base 10: en base 2, les nombres trouvés sont tous, sans exception, des répunits. On formule donc la conjecture que tous les nombres premiers 2-permutables sont des répunits pour la base 2. La conjecture se démontre facilement: s'il y a un chiffre autre que 1 dans un nombre écrit en base 2, c'est un 0, donc en permutant les chiffres de ce nombre, ce 0 peut être mis à la fin, ce qui donne un nombre pair... qui n'est pas premier.

Les nombres premiers 2-permutables sont donc des répunits en base 2. Un répunit en base 2 qui s'écrit avec n fois le 1 vaut 2^n-1. Les nombres premiers de cette forme sont très recherchés et portent le nom de «nombres premiers de Mersenne» en l'honneur de Marin Mersenne (1588-1648), un moine savant de l'ordre des Minimes qui aurait énoncé que si 2^n-1 est premier, alors n est premier. Le plus grand nombre premier connu est un nombre premier de Mersenne; il s'écrit en base 2 avec 82589933 fois le 1 et, quand on l'écrit en base 10, il comporte 24862048 chiffres. Il a été découvert en décembre 2018 par Patrick Laroche en utilisant un programme du projet *GIMPS* (*Great Internet Mersenne Prime Search*, https://www.mersenne.org).

Au total, on connaît aujourd'hui 51 nombres premiers de Mersenne, qui sont donc aussi les

2 LES NOMBRES PREMIERS ET LE CALCUL

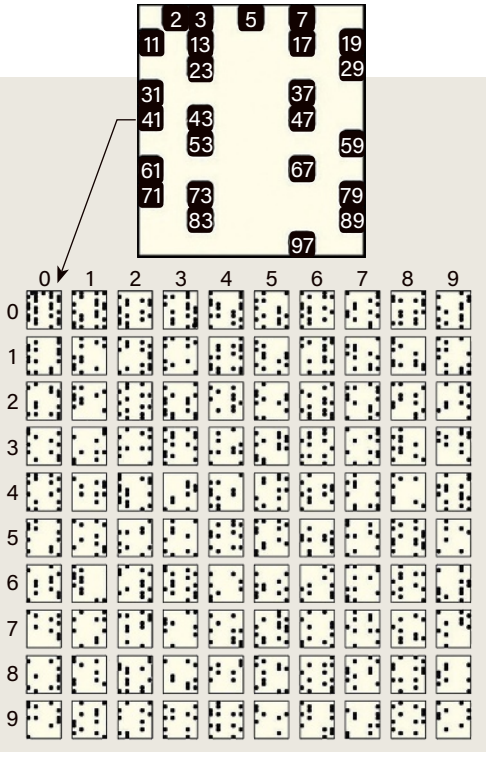
Un nombre est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même. Les plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Le tableau à droite représente les nombres premiers jusqu'à 10 000. Chaque carré représente 100 entiers en 10 lignes de 9 petits carrés (les multiples de 10 ne sont pas représentés). Les nombres premiers sont dans une petite case noire. En examinant par exemple le carré de la ligne 9 et de la colonne 5, on voit qu'il y a sept nombres premiers entre 9 500 et 9 599, qui sont 9 511, 9 521, 9 533, 9 539, 9 547, 9 551 et 9 587.

On constate sur ce graphique que la densité des nombres premiers décroît lentement. Le théorème d'Hadamard et de la Vallée Poussin de 1896 indique que la densité des nombres premiers autour de *n* est d'environ 1/log(*n*).

Autour de 10 000, cette densité est donc 1/log(10 000)=1/9,21, ce qui est compatible avec le fait qu'on trouve 9 nombres premiers dans la dernière centaine avant 10 000 de notre tableau et un peu plus dans la centaine précédente.

Les nombres premiers sont étudiés depuis l'Antiquité. Euclide savait démontrer qu'il y en a une infinité. Parmi les mathématiciens qui s'y sont intéressés, citons Ératosthène, Marin Mersenne, Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, etc. On connaît des algorithmes rapides pour tester la primalité d'un nombre, y compris quand il comporte plusieurs milliers de chiffres. En revanche, pour décomposer un entier en facteurs premiers, les seuls algorithmes rapides qu'on connaît sont quantiques et sont donc inutilisables aujourd'hui faute d'ordinateurs quantiques de puissance suffisante. Personne ne sait aujourd'hui factoriser n'importe quel nombre de 300 chiffres décimaux.



© J.-P. Delahaye/Pour la Science