des répunits, mais, là encore, on attend une démonstration complète. En regroupant cette conjecture et celle sur les répunits en base 10, on conjecture donc tout simplement qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers permutables et que ce sont les vingt-deux jusqu'à 991 et les dix répunits supérieurs à 991 connus.

DANS LES AUTRES BASES

La notion de nombre premier permutable est liée à la base de numération décimale et peut donc être envisagée dans d'autres bases. Convenons de nommer «nombres premiers b-permutables» les nombres premiers qui, quand on permute les chiffres de leur écriture en base b, restent premiers.

Une petite exploration numérique avec un ordinateur nous donne des débuts de listes pour ces nombres b-permutables.

Pour la base 2, en calculant par exemple jusqu'à 10000, on trouve quatre nombres premiers 2-permutables:

- 3, dont l'écriture en base 2 est 11_2, (l'indice derrière un nombre précise la base dans laquelle on l'écrit quand ce n'est pas la base 10)
- $7 = 111_2$
- $31 = 11111_2$
- $127 = 1111111_2$
- $8191 = 1111111111111_2$

La situation est plus simple que pour la base 10: en base 2, les nombres trouvés sont tous, sans exception, des répunits. On formule donc la conjecture que tous les nombres premiers 2-permutables sont des répunits pour la base 2. La conjecture se démontre facilement: s'il y a un chiffre autre que 1 dans un nombre écrit en base 2, c'est un 0, donc en permutant les chiffres de ce nombre, ce 0 peut être mis à la fin, ce qui donne un nombre pair... qui n'est pas premier.

Les nombres premiers 2-permutables sont donc des répunits en base 2. Un répunit en base 2 qui s'écrit avec n fois le 1 vaut 2^n-1. Les nombres premiers de cette forme sont très recherchés et portent le nom de «nombres premiers de Mersenne» en l'honneur de Marin Mersenne (1588-1648), un moine savant de l'ordre des Minimes qui aurait énoncé que si 2^n-1 est premier, alors n est premier. Le plus grand nombre premier connu est un nombre premier de Mersenne; il s'écrit en base 2 avec 82589933 fois le 1 et, quand on l'écrit en base 10, il comporte 24862048 chiffres. Il a été découvert en décembre 2018 par Patrick Laroche en utilisant un programme du projet *GIMPS* (*Great Internet Mersenne Prime Search*, https://www.mersenne.org).

Au total, on connaît aujourd'hui 51 nombres premiers de Mersenne, qui sont donc aussi les

2 LES NOMBRES PREMIERS ET LE CALCUL

Un nombre est premier s'il a exactement deux diviseurs, 1 et lui-même. Les plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Le tableau à droite représente les nombres premiers jusqu'à 10 000. Chaque carré représente 100 entiers en 10 lignes de 9 petits carrés (les multiples de 10 ne sont pas représentés). Les nombres premiers sont dans une petite case noire. En examinant par exemple le carré de la ligne 9 et de la colonne 5, on voit qu'il y a sept nombres premiers entre 9 500 et 9 599, qui sont 9 511, 9 521, 9 533, 9 539, 9 547, 9 551 et 9 587.

On constate sur ce graphique que la densité des nombres premiers décroît lentement. Le théorème d'Hadamard et de la Vallée Poussin de 1896 indique que la densité des nombres premiers autour de n est d'environ $1/\log(n)$.

Autour de 10 000, cette densité est donc $1/\log(10\,000)=1/9{,}21$, ce qui est compatible avec le fait qu'on trouve 9 nombres premiers dans la dernière centaine avant 10 000 de notre tableau et un peu plus dans la centaine précédente.

Les nombres premiers sont étudiés depuis l'Antiquité. Euclide savait démontrer qu'il y en a une infinité. Parmi les mathématiciens qui s'y sont intéressés, citons Ératosthène, Marin Mersenne, Pierre de Fermat, Leonhard Euler, Carl Friedrich Gauss, etc. On connaît des algorithmes rapides pour tester la primalité d'un nombre, y compris quand il comporte plusieurs milliers de chiffres. En revanche, pour décomposer un entier en facteurs premiers, les seuls algorithmes rapides qu'on connaît sont quantiques et sont donc inutilisables aujourd'hui faute d'ordinateurs quantiques de puissance suffisante. Personne ne sait aujourd'hui factoriser n'importe quel nombre de 300 chiffres décimaux.