

3

RAISONNEMENTS HEURISTIQUES

Les raisonnements heuristiques utilisés en théorie des nombres déterminent des propriétés presque certaines concernant les entiers ou les familles d'entiers. La densité des nombres premiers étant $1/\log(n)$ pour les nombres autour de n , on en déduit que la densité des nombres premiers jumeaux (nombres premiers séparés de deux unités, comme 11-13, 17-19, 821-823) autour de n est, en ordre de grandeur, probablement $1/(\log(n))^2$. L'argument heuristique est : « La probabilité que p et que $p + 2$ soient simultanément premiers est le produit de la probabilité que p soit premier par celle que $p + 2$ le soit, donc le $1/\log(n)$ du théorème des nombres premiers fournit un $1/(\log(n))^2$. »

Bien sûr, l'argument n'est pas totalement satisfaisant, puisque même si la densité des nombres premiers est un résultat sûr, le fait pour un entier d'être premier ne résulte pas d'un tirage aléatoire : il est donc abusif de parler de probabilité. De plus, les événements concernant la primalité de p et de $p + 2$ ne sont pas indépendants, ce qui serait nécessaire pour multiplier les probabilités.

Le raisonnement heuristique donne une affirmation probable, mais qui ne peut être considérée comme rigoureusement prouvée.

Pour les nombres premiers permutable, on peut mener le raisonnement heuristique suivant. La « probabilité » pour qu'un entier p formé de n chiffres décimaux soit premier ainsi que les $n!$ nombres qu'on obtient en permutant ses chiffres est, en ordre de grandeur, $(1/\log(p))^{n!}$. Puisqu'il y a environ 10^n nombres de n chiffres et que leur taille est environ 10^{n-1} , le nombre d'entiers premiers permutable à n chiffres sera environ $10^n / (\log(10^{n-1}))^{n!}$.

Le calcul donne 18,9 pour $n = 2$, $1/10$ pour $n = 3$, 7×10^{-17} pour $n = 4$ et 2×10^{-111} pour $n = 5$. Ces évaluations sont grossièrement compatibles avec ce que l'on sait des nombres permutable trouvés, mais surtout, la décroissance de l'évaluation heuristique est tellement rapide, quand n augmente, que le calcul appuie la conjecture qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers permutable. Pour les nombres premiers circulaires, un raisonnement du même type appuie aussi la conjecture qu'il n'y en a qu'un nombre fini.



51 nombres premiers 2-permutables connus. On ignore s'il en existe une infinité, mais cette fois on conjecture plutôt que oui.

Pour la base 3, en calculant jusqu'à 50000, les nombres premiers 3-permutables sont : $2=2_3$, $5=12_3$, $7=21_3$, $13=111_3$, $1093=111111_3$. Mis à part 2, 5 et 7, ce sont tous des répunits de la base 3. En base 4, les nombres premiers 4-permutables sont, jusqu'à 50000 : $2=2_4$, $3=3_4$, $5=11_4$, $7=13_4$, $13=31_4$, $23=113_4$, $29=131_4$, $53=311_4$.

Pour la base 5, en calculant jusqu'à 50000, on a : $2=2_5$, $3=3_5$, $7=12_5$, $11=21_5$, $13=23_5$,

$17=32_5$, $19=34_5$, $23=43_5$, $31=111_5$, $1249=14444_5$, $2749=41444_5$, $3049=44144_5$, $3109=44414_5$, $3121=44441_5$, $19531=111111_5$.

D'autres listes de nombres premiers b -permutable sont à la portée de votre ordinateur ou données sur Wikipédia, le tout conduisant à la conjecture générale : dans toute base b supérieure ou égale à 2, à l'exception du début de leur liste, les nombres premiers b -permutable sont les répunits premiers de la base b .

Envisager toutes les permutations est très exigeant et cela a eu pour conséquence que nous

4

LES NOMBRES PREMIERS DÉLICATS EN BASE B

Les nombres premiers délicats sont les nombres premiers qui ne restent jamais premiers quand on change l'un quelconque de leurs chiffres. Les dix premiers nombres premiers délicats pour les bases de 2 à 10 sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

Il a été démontré que les nombres premiers délicats en base 10 ont une densité strictement positive parmi les nombres premiers. Cela signifie que pour un certain nombre réel $D > 0$, le rapport (nombre d'entiers premiers délicats jusqu'à N)/(nombre d'entiers premiers jusqu'à N)

s'approche de D ou le dépasse quand N tend vers l'infini.

Un raisonnement heuristique suggère une valeur pour D . Pour un nombre premier de k chiffres en base b , il y a $(b-1)k$ nombres modifiés. La « probabilité » pour qu'un de ces nombres modifiés soit composé est $1 - 1/\log(b^k)$. La probabilité que tous les nombres modifiés d'un nombre premier à k chiffres soient composés est donc : $[1 - 1/\log(b^k)]^{(b-1)k}$. C'est la probabilité qu'un nombre premier à k chiffres soit délicat. Le nombre attendu de nombres premiers à k chiffres est :

$b^k/\log(b^k)$. Le nombre attendu de nombres premiers délicats à k chiffres est donc :

$$[b^k/\log(b^k)][1 - 1/\log(b^k)]^{(b-1)k}.$$

La densité D attendue des nombres premiers délicats à k chiffres parmi les nombres premiers à k chiffres est donc : $[1 - 1/\log(b^k)]^{(b-1)k}$. Si l'on calcule les valeurs que prend cette expression pour $b = 10$, on trouve : $k = 10$, $D = 0,018\ 38$; $k = 100$, $D = 0,019\ 897$; $k = 1\ 000$, $D = 0,020\ 050$.

La densité D semble avoir une valeur proche de 2 %. Michael Filaseta m'a indiqué que la limite de cette expression était $\exp(-9/\log(10))$, qui vaut précisément 0,020 067 56... D'autres raisonnements heuristiques plus fins sont possibles et conduisent à des évaluations sensiblement plus petites pour D . Cette situation illustre le fait que les raisonnements heuristiques sont insuffisants pour obtenir des certitudes !

Base 2 : 127, 173, 191, 223, 233, 239, 251, 257, 277, 337.

Base 3 : 2, 7, 13, 19, 31, 41, 149, 239, 283, 293.

Base 4 : 373, 2 333, 2 917, 2 999, 3 779, 6 211, 6 323, 6 379, 7 043, 7 583.

Base 5 : 83, 233, 277, 397, 487, 509, 593, 647, 739, 907.

Base 6 : 28 151, 82 913, 153 887, 437 771, 632 987, 676 297, 685 169, 873 359, 903 781, 934 001.

Base 7 : 223, 409, 491, 587, 701, 1 051, 1 163, 1 237, 1 361, 1 637.

Base 8 : 6 211, 57 803, 62 213, 83 477, 130 769, 132 589, 145 289, 153 259, 161 869, 169 909.

Base 9 : 2 789, 4 027, 6 421, 8 963, 20 521, 20 719, 23 143, 23 473, 27 631, 28 579.

Base 10 : 294 001, 505 447, 584 141, 604 171, 971 767, 1 062 599, 1 282 529, 1 524 181, 2 017 963, 2 474 431.

ne savons pour aucune base b s'il existe une infinité de nombres premiers b -permutables.

ROBUSTE AU SENS DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES

Pour augmenter un peu les chances d'avoir des listes infinies de résultats, on considère les «nombres premiers circulaires» : n est un nombre premier b -circulaire s'il est premier et si, en opérant une permutation circulaire de ses chiffres quand il est écrit en base b , on obtient toujours un nombre premier. L'entier 37199 est un nombre premier 10-circulaire car les nombres 71993, 19937, 99371, 93719 sont premiers.

Voici la liste des nombres premiers 10-circulaires jusqu'à 1 000 000 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 197, 199, 311, 337, 373, 719, 733, 919, 971, 991, 1 193, 1 931, 3 119, 3 779, 7 793, 7 937, 9 311, 9 377, 11 939, 19 391, 19 937, 37 199, 39 119, 71 993, 91 193, 93 719, 93 911, 99 371, 193 939, 199 933, 319 993, 331 999, 391 939, 393 919, 919 393, 933 199, 939 193, 939 391, 993 319, 999 331.

On y retrouve tous les nombres premiers 10-permutables. Les répunits premiers de la base 10 sont bien sûr aussi dans la liste et donc, plus loin, on est certain de trouver 19 fois le 1 ; puis 23, 317, 1 031, 49 081, 86 453, 109 297, 270 343, 579 477, 817 7207 fois le 1.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux nombres premiers circulaires qui ne sont pas des répunits premiers de la base 10, vous n'en trouverez probablement que cinquante-quatre et aucun au-delà de 999 331. Ce nombre pourrait bien être le dernier nombre premier circulaire qui ne soit pas un répunit de la base 10. En effet, des calculs massifs menés en 2019 par Felix Fröhlich, un amateur de programmation amoureux des nombres premiers, montrent que s'il y en a, ils dépassent 10^{23} . Il en résulte qu'une conjecture raisonnable concernant les nombres premiers 10-circulaires est à nouveau qu'il n'en existe qu'un nombre fini. Leur liste serait composée des onze répunits premiers connus de la base 10 et des cinquante-quatre autres trouvés et qui sont tous inférieurs à 1 000 000. Selon un raisonnement heuristique fondé sur des arguments probabilistes, il n'y aurait qu'un nombre fini de nombres premiers 10-circulaires qui ne sont pas des répunits (voir l'encadré 2).

La notion de nombre premier b -circulaire dépendant de la base b , l'étude doit être poursuivie. Nous vous laissons le plaisir d'explorer avec votre ordinateur ces familles de nombres premiers b -circulaires pour b autre que 10.

Certains nombres premiers ne supportent pas qu'on en modifie un seul chiffre, car à chaque essai cela leur fait perdre leur statut privilégié de