

4

LES NOMBRES PREMIERS DÉLICATS EN BASE B

Les nombres premiers délicats sont les nombres premiers qui ne restent jamais premiers quand on change l'un quelconque de leurs chiffres. Les dix premiers nombres premiers délicats pour les bases de 2 à 10 sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

Il a été démontré que les nombres premiers délicats en base 10 ont une densité strictement positive parmi les nombres premiers. Cela signifie que pour un certain nombre réel $D > 0$, le rapport (nombre d'entiers premiers délicats jusqu'à N)/(nombre d'entiers premiers jusqu'à N)

s'approche de D ou le dépasse quand N tend vers l'infini.

Un raisonnement heuristique suggère une valeur pour D . Pour un nombre premier de k chiffres en base b , il y a $(b-1)k$ nombres modifiés. La « probabilité » pour qu'un de ces nombres modifiés soit composé est $1 - 1/\log(b^k)$. La probabilité que tous les nombres modifiés d'un nombre premier à k chiffres soient composés est donc : $[1 - 1/\log(b^k)]^{(b-1)k}$. C'est la probabilité qu'un nombre premier à k chiffres soit délicat. Le nombre attendu de nombres premiers à k chiffres est :

$b^k/\log(b^k)$. Le nombre attendu de nombres premiers délicats à k chiffres est donc :

$$[b^k/\log(b^k)][1 - 1/\log(b^k)]^{(b-1)k}.$$

La densité D attendue des nombres premiers délicats à k chiffres parmi les nombres premiers à k chiffres est donc : $[1 - 1/\log(b^k)]^{(b-1)k}$. Si l'on calcule les valeurs que prend cette expression pour $b = 10$, on trouve : $k = 10$, $D = 0,018\ 38$; $k = 100$, $D = 0,019\ 897$; $k = 1\ 000$, $D = 0,020\ 050$.

La densité D semble avoir une valeur proche de 2 %. Michael Filaseta m'a indiqué que la limite de cette expression était $\exp(-9/\log(10))$, qui vaut précisément 0,020 067 56... D'autres raisonnements heuristiques plus fins sont possibles et conduisent à des évaluations sensiblement plus petites pour D . Cette situation illustre le fait que les raisonnements heuristiques sont insuffisants pour obtenir des certitudes !

Base 2 : 127, 173, 191, 223, 233, 239, 251, 257, 277, 337.

Base 3 : 2, 7, 13, 19, 31, 41, 149, 239, 283, 293.

Base 4 : 373, 2 333, 2 917, 2 999, 3 779, 6 211, 6 323, 6 379, 7 043, 7 583.

Base 5 : 83, 233, 277, 397, 487, 509, 593, 647, 739, 907.

Base 6 : 28 151, 82 913, 153 887, 437 771, 632 987, 676 297, 685 169, 873 359, 903 781, 934 001.

Base 7 : 223, 409, 491, 587, 701, 1 051, 1 163, 1 237, 1 361, 1 637.

Base 8 : 6 211, 57 803, 62 213, 83 477, 130 769, 132 589, 145 289, 153 259, 161 869, 169 909.

Base 9 : 2 789, 4 027, 6 421, 8 963, 20 521, 20 719, 23 143, 23 473, 27 631, 28 579.

Base 10 : 294 001, 505 447, 584 141, 604 171, 971 767, 1 062 599, 1 282 529, 1 524 181, 2 017 963, 2 474 431.

ne savons pour aucune base b s'il existe une infinité de nombres premiers b -permutables.

ROBUSTE AU SENS DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES

Pour augmenter un peu les chances d'avoir des listes infinies de résultats, on considère les «nombres premiers circulaires» : n est un nombre premier b -circulaire s'il est premier et si, en opérant une permutation circulaire de ses chiffres quand il est écrit en base b , on obtient toujours un nombre premier. L'entier 37199 est un nombre premier 10-circulaire car les nombres 71993, 19937, 99371, 93719 sont premiers.

Voici la liste des nombres premiers 10-circulaires jusqu'à 1 000 000 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 113, 131, 197, 199, 311, 337, 373, 719, 733, 919, 971, 991, 1 193, 1 931, 3 119, 3 779, 7 793, 7 937, 9 311, 9 377, 11 939, 19 391, 19 937, 37 199, 39 119, 71 993, 91 193, 93 719, 93 911, 99 371, 193 939, 199 933, 319 993, 331 999, 391 939, 393 919, 919 393, 933 199, 939 193, 939 391, 993 319, 999 331.

On y retrouve tous les nombres premiers 10-permutables. Les répunits premiers de la base 10 sont bien sûr aussi dans la liste et donc, plus loin, on est certain de trouver 19 fois le 1 ; puis 23, 317, 1 031, 49 081, 86 453, 109 297, 270 343, 579 477, 817 7207 fois le 1.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux nombres premiers circulaires qui ne sont pas des répunits premiers de la base 10, vous n'en trouverez probablement que cinquante-quatre et aucun au-delà de 999 331. Ce nombre pourrait bien être le dernier nombre premier circulaire qui ne soit pas un répunit de la base 10. En effet, des calculs massifs menés en 2019 par Felix Fröhlich, un amateur de programmation amoureux des nombres premiers, montrent que s'il y en a, ils dépassent 10^{23} . Il en résulte qu'une conjecture raisonnable concernant les nombres premiers 10-circulaires est à nouveau qu'il n'en existe qu'un nombre fini. Leur liste serait composée des onze répunits premiers connus de la base 10 et des cinquante-quatre autres trouvés et qui sont tous inférieurs à 1 000 000. Selon un raisonnement heuristique fondé sur des arguments probabilistes, il n'y aurait qu'un nombre fini de nombres premiers 10-circulaires qui ne sont pas des répunits (voir l'encadré 2).

La notion de nombre premier b -circulaire dépendant de la base b , l'étude doit être poursuivie. Nous vous laissons le plaisir d'explorer avec votre ordinateur ces familles de nombres premiers b -circulaires pour b autre que 10.

Certains nombres premiers ne supportent pas qu'on en modifie un seul chiffre, car à chaque essai cela leur fait perdre leur statut privilégié de

nombre premier. Un exemple est 294001: dès qu'on change un de ses chiffres par un autre, cet entier devient toujours un nombre composé. En modifiant le chiffre des unités, on obtient 294000, 294002, 294003, ..., 294009, qui sont tous composés. C'est aussi le cas si l'on modifie le chiffre des dizaines, ou le chiffre des centaines, etc.

NOMBRES PREMIERS DÉLICATS

L'exigence semble forte et d'ailleurs votre machine calculera un moment avant de trouver un nombre premier de ce genre. On va voir que ces nombres, dénommés «nombres premiers délicats» ou «nombres faiblement premiers», sont, contrairement à une première intuition, bien moins rares que ceux que nous avons cherchés précédemment.

La première mention de ces nombres provient d'un problème posé en 1978 par Murray Klamkin dans *Mathematics Magazine*, une revue américaine destinée aux étudiants et enseignants. Parmi les réponses publiées par le journal l'année suivante, figurent des calculs et la démonstration qu'il existe une infinité de nombres premiers délicats; la démonstration était proposée par le célèbre et prolifique mathématicien hongrois Paul Erdős.

Le nombre premier délicat que nous avons donné en exemple est le plus petit pour la base 10; il est suivi de 505 447, 584 141, 604 171, 971 767, 1062 599, 1282 529, 1524 181, 2017 963, 2 474 431, 2 690 201, 3 085 553, 3 326 489, 4 393 139, 5 152 507, 5 564 453, 5 575 259, 6 173 731, 6 191 371, 6 236 179, 6 463 267, 6 712 591, 7 204 777, ... C'est la suite A050249 de l'encyclopédie de Neil Sloane (<https://oeis.org>).

Que la suite soit infinie est remarquable, mais il y a bien plus remarquable. En 2011, Terence Tao, professeur à l'université de Californie à Los Angeles et médaillé Fields en 2006, a en effet démontré que ces nombres constituent une proportion non nulle des nombres premiers. Ne retenir qu'un nombre premier sur deux donne un ensemble de densité $1/2$ dans l'ensemble des nombres premiers. La densité des nombres premiers délicats semble plus faible que $1/2$, mais il est certain qu'elle est strictement positive, ce qui signifie qu'en parcourant la suite des nombres premiers, on tombera régulièrement sur des nombres premiers délicats. L'article de Terence Tao ne permet pas de connaître cette densité des nombres premiers délicats. Michael Filaseta, de l'université de Caroline du Sud et spécialiste de ces questions, que j'ai interrogé, m'a indiqué qu'il savait prouver que la densité est supérieure à $1/(2 \times 10^{756\,575})$. Cette valeur est extrêmement petite!

Des résultats encore plus récents renforcent l'étonnement face à ces nombres premiers délicats. On envisage maintenant non seulement de changer l'un des chiffres de l'écriture usuelle, mais aussi de changer l'un des 0 qu'on peut

placer devant le nombre sans que cela modifie sa valeur (par exemple, $331 = 0331 = 00331$). On peut placer autant de 0 que l'on veut devant un nombre sans changer sa valeur; il y a donc une infinité de modifications possibles de ces 0, et on veut que toutes donnent des nombres composés. Lorsque c'est le cas pour un nombre premier N , on dit que N est un «nombre premier gravement délicat» (*widely digitally delicate prime*). Bien sûr, ces nombres sont beaucoup moins nombreux que les nombres premiers délicats.

En 2020, Michael Filaseta et son doctorant Jeremiah Southwick ont montré que les nombres premiers gravement délicats existent et qu'il y en a une infinité. Mieux encore: ils constituent aussi une proportion non nulle de l'ensemble des nombres premiers. La démonstration est particulière à la base 10; pour les autres bases, on ignore si le même résultat est correct. La même borne inférieure que précédemment est valable pour cette densité.

Le plus extraordinaire est cependant que même si ces nombres premiers gravement délicats représentent une proportion strictement positive des nombres premiers, on n'en connaît aucun aujourd'hui!

Un article récent de Michael Filaseta et Jacob Juillerat confirme que ces nombres ne sont pas très rares, car les chercheurs démontrent que quel que soit l'entier positif k , il existe des suites de k nombres premiers consécutifs qui sont tous gravement délicats. L'idée est que les nombres premiers se raréfient et qu'en conséquence plus on prend un grand nombre premier N , plus il devient facile que les nombres modifiés obtenus à partir de N soient composés. Bien sûr, pour tirer de cette idée une démonstration, un travail important est nécessaire (*voir la bibliographie*)!

Étrangement, ce que l'on sait n'interdit pas que les nombres premiers soient tous délicats à partir d'une certaine valeur ou même soient tous gravement délicats, autrement dit que leur densité soit 1. Cela serait un comble pour des nombres dont on ne réussit à proposer aucun exemple!

L'idée que le mathématicien a de la rareté n'est pas tout à fait la même que celle du sens commun: pour lui, les nombres premiers gravement délicats sont fréquents puisque leur densité est strictement positive, et pourtant, il ne peut nous en montrer aucun. ■

Ajout de dernière heure. Des calculs par sondage menés par Michael Filaseta semblent indiquer que la densité des nombres premiers délicats serait d'environ 0,00005. De plus, bien que cela soit non confirmé et non publié, Jon Grantham, de l'Institute for Defense Analyses, aux États-Unis, aurait trouvé un nombre premier gravement délicat. Il commence par 903663, finit par 399249 et comporte 4030 chiffres.

BIBLIOGRAPHIE

M. Filaseta et al., **Widely Digitally Stable Numbers, Combinatorial and Additive Number Theory IV**, Springer, 2021.

M. Filaseta et J. Southwick, **Primes that become composite after changing an arbitrary digit**, *Mathematics of Computation*, vol. 90, pp. 979-993, 2021.

M. Filaseta et J. Juillerat, **Consecutive primes which are widely digitally delicate**, prépublication arXiv:2101.08898, 2021.

J. Southwick, **Two inquiries related to the digits of prime numbers**, thèse de l'université de Caroline du Sud, 2020.

A. Slinko, **Absolute Primes**, prépublication arXiv:1811.08613, 2018.

J.-P. Delahaye, **Merveilleux Nombres premiers**, Belin/Pour la Science, 2013.

T. Tao, **A remark on primality testing and decimal expansions**, *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 91(3), pp. 405-413, 2011.

C. K. Caldwell et G. L. Honaker, **Prime Curios I**, CreateSpace, 2009.

P. Erdős, **Solution to problem 1029 : Erdős and the computer**, *Mathematics Magazine*, vol. 52, pp. 180-181, 1979.