

nombre premier. Un exemple est 294001: dès qu'on change un de ses chiffres par un autre, cet entier devient toujours un nombre composé. En modifiant le chiffre des unités, on obtient 294000, 294002, 294003, ..., 294009, qui sont tous composés. C'est aussi le cas si l'on modifie le chiffre des dizaines, ou le chiffre des centaines, etc.

NOMBRES PREMIERS DÉLICATS

L'exigence semble forte et d'ailleurs votre machine calculera un moment avant de trouver un nombre premier de ce genre. On va voir que ces nombres, dénommés «nombres premiers délicats» ou «nombres faiblement premiers», sont, contrairement à une première intuition, bien moins rares que ceux que nous avons cherchés précédemment.

La première mention de ces nombres provient d'un problème posé en 1978 par Murray Klamkin dans *Mathematics Magazine*, une revue américaine destinée aux étudiants et enseignants. Parmi les réponses publiées par le journal l'année suivante, figurent des calculs et la démonstration qu'il existe une infinité de nombres premiers délicats; la démonstration était proposée par le célèbre et prolifique mathématicien hongrois Paul Erdős.

Le nombre premier délicat que nous avons donné en exemple est le plus petit pour la base 10; il est suivi de 505447, 584141, 604171, 971767, 1062599, 1282529, 1524181, 2017963, 2474431, 2690201, 3085553, 3326489, 4393139, 5152507, 5564453, 5575259, 6173731, 6191371, 6236179, 6463267, 6712591, 7204777, ... C'est la suite A050249 de l'encyclopédie de Neil Sloane (<https://oeis.org>).

Que la suite soit infinie est remarquable, mais il y a bien plus remarquable. En 2011, Terence Tao, professeur à l'université de Californie à Los Angeles et médaillé Fields en 2006, a en effet démontré que ces nombres constituent une proportion non nulle des nombres premiers. Ne retenir qu'un nombre premier sur deux donne un ensemble de densité $1/2$ dans l'ensemble des nombres premiers. La densité des nombres premiers délicats semble plus faible que $1/2$, mais il est certain qu'elle est strictement positive, ce qui signifie qu'en parcourant la suite des nombres premiers, on tombera régulièrement sur des nombres premiers délicats. L'article de Terence Tao ne permet pas de connaître cette densité des nombres premiers délicats. Michael Filaseta, de l'université de Caroline du Sud et spécialiste de ces questions, que j'ai interrogé, m'a indiqué qu'il savait prouver que la densité est supérieure à $1/(2 \times 10^{756575})$. Cette valeur est extrêmement petite!

Des résultats encore plus récents renforcent l'étonnement face à ces nombres premiers délicats. On envisage maintenant non seulement de changer l'un des chiffres de l'écriture usuelle, mais aussi de changer l'un des 0 qu'on peut

placer devant le nombre sans que cela modifie sa valeur (par exemple, $331 = 0331 = 00331$). On peut placer autant de 0 que l'on veut devant un nombre sans changer sa valeur; il y a donc une infinité de modifications possibles de ces 0, et on veut que toutes donnent des nombres composés. Lorsque c'est le cas pour un nombre premier N , on dit que N est un «nombre premier gravement délicat» (*widely digitally delicate prime*). Bien sûr, ces nombres sont beaucoup moins nombreux que les nombres premiers délicats.

En 2020, Michael Filaseta et son doctorant Jeremiah Southwick ont montré que les nombres premiers gravement délicats existent et qu'il y en a une infinité. Mieux encore: ils constituent aussi une proportion non nulle de l'ensemble des nombres premiers. La démonstration est particulière à la base 10; pour les autres bases, on ignore si le même résultat est correct. La même borne inférieure que précédemment est valable pour cette densité.

Le plus extraordinaire est cependant que même si ces nombres premiers gravement délicats représentent une proportion strictement positive des nombres premiers, on n'en connaît aucun aujourd'hui!

Un article récent de Michael Filaseta et Jacob Juillerat confirme que ces nombres ne sont pas très rares, car les chercheurs démontrent que quel que soit l'entier positif k , il existe des suites de k nombres premiers consécutifs qui sont tous gravement délicats. L'idée est que les nombres premiers se raréfient et qu'en conséquence plus on prend un grand nombre premier N , plus il devient facile que les nombres modifiés obtenus à partir de N soient composés. Bien sûr, pour tirer de cette idée une démonstration, un travail important est nécessaire (*voir la bibliographie*)!

Étrangement, ce que l'on sait n'interdit pas que les nombres premiers soient tous délicats à partir d'une certaine valeur ou même soient tous gravement délicats, autrement dit que leur densité soit 1. Cela serait un comble pour des nombres dont on ne réussit à proposer aucun exemple!

L'idée que le mathématicien a de la rareté n'est pas tout à fait la même que celle du sens commun: pour lui, les nombres premiers gravement délicats sont fréquents puisque leur densité est strictement positive, et pourtant, il ne peut nous en montrer aucun. ■

Ajout de dernière heure. Des calculs par sondage menés par Michael Filaseta semblent indiquer que la densité des nombres premiers délicats serait d'environ 0,00005. De plus, bien que cela soit non confirmé et non publié, Jon Grantham, de l'Institute for Defense Analyses, aux États-Unis, aurait trouvé un nombre premier gravement délicat. Il commence par 903663, finit par 399249 et comporte 4030 chiffres.

BIBLIOGRAPHIE

M. Filaseta et al., **Widely Digitally Stable Numbers, Combinatorial and Additive Number Theory IV**, Springer, 2021.

M. Filaseta et J. Southwick, **Primes that become composite after changing an arbitrary digit**, *Mathematics of Computation*, vol. 90, pp. 979-993, 2021.

M. Filaseta et J. Juillerat, **Consecutive primes which are widely digitally delicate**, prépublication arXiv:2101.08898, 2021.

J. Southwick, **Two inquiries related to the digits of prime numbers**, thèse de l'université de Caroline du Sud, 2020.

A. Slinko, **Absolute Primes**, prépublication arXiv:1811.08613, 2018.

J.-P. Delahaye, **Merveilleux Nombres premiers**, Belin/Pour la Science, 2013.

T. Tao, **A remark on primality testing and decimal expansions**, *Journal of the Australian Mathematical Society*, vol. 91(3), pp. 405-413, 2011.

C. K. Caldwell et G. L. Honaker, **Prime Curios I**, CreateSpace, 2009.

P. Erdős, **Solution to problem 1029 : Erdős and the computer**, *Mathematics Magazine*, vol. 52, pp. 180-181, 1979.