

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

MESURER LE TEMPS EN ALLUMANT DES MÈCHES

Un problème de récréation mathématique fait surgir des énoncés indécidables plus simples que ceux que l'on connaissait.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

T

out commence avec le problème de récréation mathématique suivant. Vous disposez de deux mèches qui, chacune, brûle en 1 minute quand on en allume une extrémité. Vous pouvez allumer les deux extrémités d'une mèche en même temps si vous le souhaitez, mais vous ne pouvez pas les couper, car leur homogénéité n'est pas parfaite et il n'est donc pas certain qu'elles brûlent à vitesse constante. On suppose aussi que la vitesse de combustion des mèches ne dépend pas du sens de la propagation du feu. Comment s'y prendre pour mesurer une durée de 45 secondes ?

C'est relativement facile : vous allumez les deux extrémités de la première mèche et une extrémité de la seconde. Vous attendez que la première mèche soit entièrement consumée. Cela prend 30 secondes. À l'instant où la première mèche finit de brûler, vous allumez la seconde extrémité de l'autre mèche dont une partie (la moitié « temporelle ») a déjà brûlé. Il faut 15 secondes supplémentaires pour que la deuxième mèche se consume entièrement. Cela fait un total de 45 secondes (voir l'encadré 1).

Bien sûr, le problème se généralise et on peut simplement s'interroger sur les durées mesurables quand on dispose d'autant de mèches que nécessaire, chacune brûlant en une unité de temps.

Comme précédemment, on ne s'autorise pas à couper les mèches, car cela serait inutile : elles ne brûlent pas à vitesse constante, seule la durée totale de combustion est certaine. On imagine aussi qu'on est assez adroit pour allumer simultanément autant d'extrémités de mèches qu'on le désire, à condition de le faire soit à l'instant 0, soit à des instants où d'autres mèches cessent de brûler.

L'ensemble F des instants qu'on peut mesurer avec de telles mèches est l'ensemble des nombres dits « fusibles ». Amusez-vous à montrer que $23/16$ et $53/32$ sont des nombres fusibles (voir l'encadré 1 pour les solutions).

L'ensemble F est d'une incroyable richesse qui a été découverte et étudiée par Jeff Erickson, de l'université de l'Illinois, aux États-Unis, Gabriel Nivasch, de l'université d'Ariel, en Israël, et Junyan Xu, de l'université de l'Indiana à Bloomington, aux États-Unis. Bien que le sujet soit exploré depuis plusieurs années, ce n'est que tout récemment que ces trois chercheurs ont publié un article détaillé (voir la bibliographie) décrivant la structure de F ainsi que des conséquences étonnantes impliquant la notion d'indécidabilité.

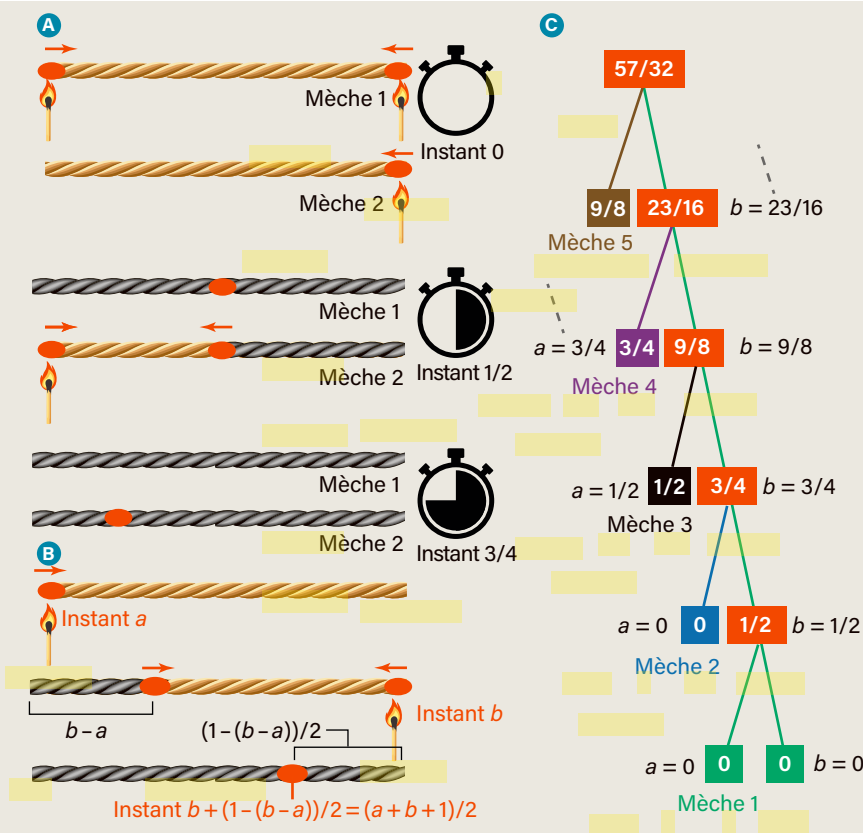
Comprendre les nombres fusibles exige l'utilisation d'outils avancés qui échappent à l'arithmétique de base, l'« arithmétique de

MÈCHES SIMPLES

Avec deux mèches brûlant une unité de temps quand on en allume une extrémité, il faut mesurer $3/4$ d'unité de temps. La solution est donnée en A.

En B, on a dessiné le schéma montrant que si l'on connaît des solutions pour les durées a et b avec $|a - b| \leq 1$, on en connaît aussi une pour $(a + b + 1)/2$.

Cette formule est utilisée sur le graphe C pour l'allumage des mèches afin d'obtenir les durées $1/2$, $3/4$, $9/8$, $23/16$, $57/32$. On obtient le temps $1/2$ avec $a = 0$, $b = 0$ (une seule mèche), le temps $3/4$ avec $a = 0$ et $b = 1/2$ (deux mèches), $9/8$ avec $a = 1/2$ et $b = 3/4$ (trois mèches), etc.



Peano». C'est la première fois que cette impuissance apparaît à propos d'un problème aussi élémentaire tiré d'une récréation mathématique. Nous verrons aussi que le problème conduit à la définition d'une fonction aux propriétés inouïes et qui fera plier tout ordinateur, aussi puissant soit-il.

On sait donc maintenant que l'indécidabilité démontrée par le logicien autrichien Kurt Gödel concerne des énoncés élémentaires. Cela montre, pour ceux qui en doutaient encore, qu'elle n'est pas un jeu gratuit de logiciens, mais bien une difficulté sur laquelle tout mathématicien peut tomber par surprise.

DÉFINITION EN UNE LIGNE

L'ensemble F des nombres fusibles se définit par une formule qui tient sur une ligne :

$$0 \in F \text{ et } [a, b \in F \text{ et } |a - b| \leq 1 \Rightarrow (a + b + 1)/2 \in F].$$

Justifions cette formule. Soit a et b deux nombres fusibles tels que $a < b$ et tels que leur différence soit inférieure à 1, la longueur d'une mèche en unité de temps. Par hypothèse, on sait mesurer les durées a et b . On prend une mèche de plus que celles nécessaires pour mesurer a et b ; on en allume une extrémité à l'instant a , et l'autre extrémité à l'instant b . La mèche brûle donc durant $b - a$ unité de temps avant que sa seconde extrémité soit allumée. La longueur de mèche restante correspond alors à $1 - (b - a)$ unité de temps. Et comme ce restant est allumé à ses deux extrémités, il brûle en $(1 - (b - a))/2$ unité de temps (voir l'encadré 1). Au total, la mèche finira de brûler précisément à l'instant :

L'ENSEMBLE DES NOMBRES FUSIBLES

L'ensemble F des nombres fusibles est l'ensemble des durées qu'on peut mesurer avec des mèches, comme dessiné dans l'encadré 1. Grâce à la formule qui indique que si a et b sont dans F avec $|a - b| < 1$, alors $(a + b + 1)/2$ est aussi dans F , on trouve plusieurs séries infinies de nombres fusibles.

En A, on a figuré la série $1 - 1/2^n$, qui donne le point limite 1 (voir les calculs dans le texte de l'article). En B, on commence par la série $5/4 - 1/2^{n+1}$, qui donne le point limite $5/4$. Tous les nombres de la forme $3/2 - 1/2^{m+1}$ sont aussi des points limites, et donc le nombre $3/2$ est un point limite de points limites (« point limite double »). On trouve, plus à droite, que $7/4$ est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera « point limite triple ». Et ainsi de suite. Cela conduit à un point limite d'ordre infini en 2.

