

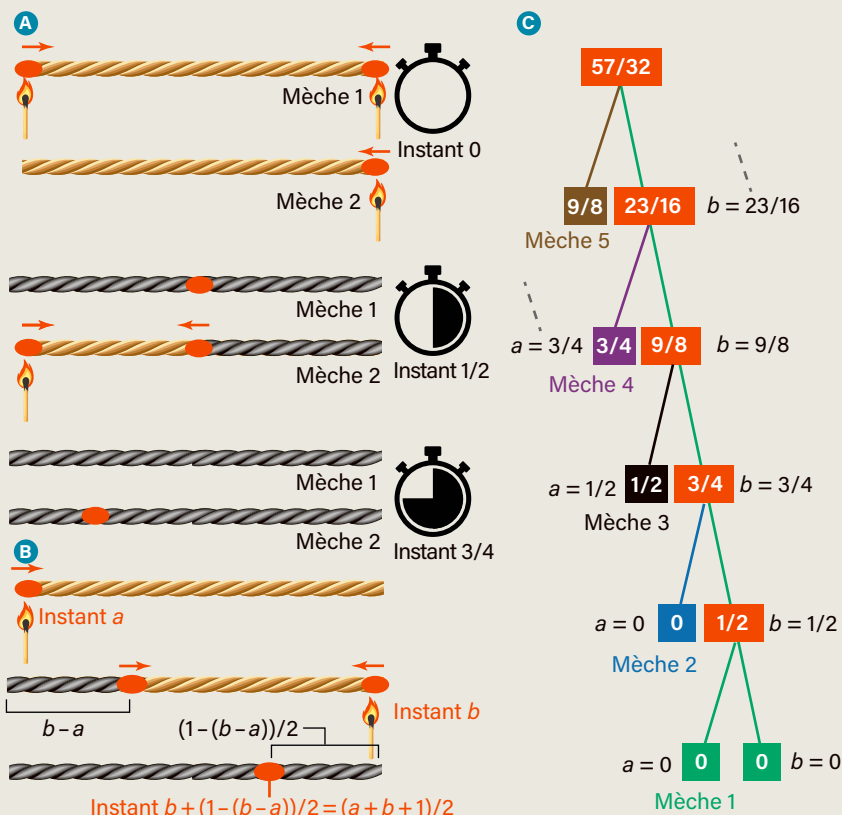
1

MÈCHES SIMPLES

Avec deux mèches brûlant une unité de temps quand on en allume une extrémité, il faut mesurer $3/4$ d'unité de temps. La solution est donnée en A.

En B, on a dessiné le schéma montrant que si l'on connaît des solutions pour les durées a et b avec $|a - b| \leq 1$, on en connaît aussi une pour $(a + b + 1)/2$.

Cette formule est utilisée sur le graphe C pour l'allumage des mèches afin d'obtenir les durées $1/2$, $3/4$, $9/8$, $23/16$, $57/32$. On obtient le temps $1/2$ avec $a = 0$, $b = 0$ (une seule mèche), le temps $3/4$ avec $a = 0$ et $b = 1/2$ (deux mèches), $9/8$ avec $a = 1/2$ et $b = 3/4$ (trois mèches), etc.



Peano». C'est la première fois que cette impuissance apparaît à propos d'un problème aussi élémentaire tiré d'une récréation mathématique. Nous verrons aussi que le problème conduit à la définition d'une fonction aux propriétés inouïes et qui fera plier tout ordinateur, aussi puissant soit-il.

On sait donc maintenant que l'indécidabilité démontrée par le logicien autrichien Kurt Gödel concerne des énoncés élémentaires. Cela montre, pour ceux qui en doutaient encore, qu'elle n'est pas un jeu gratuit de logiciens, mais bien une difficulté sur laquelle tout mathématicien peut tomber par surprise.

DÉFINITION EN UNE LIGNE

L'ensemble F des nombres fusibles se définit par une formule qui tient sur une ligne:

$$0 \in F \text{ et } [a, b \in F \text{ et } |a - b| \leq 1 \Rightarrow (a + b + 1)/2 \in F].$$

Justifions cette formule. Soit a et b deux nombres fusibles tels que $a < b$ et tels que leur différence soit inférieure à 1, la longueur d'une mèche en unité de temps. Par hypothèse, on sait mesurer les durées a et b . On prend une mèche de plus que celles nécessaires pour mesurer a et b ; on en allume une extrémité à l'instant a , et l'autre extrémité à l'instant b . La mèche brûle donc durant $b - a$ unité de temps avant que sa seconde extrémité soit allumée. La longueur de mèche restante correspond alors à $1 - (b - a)$ unité de temps. Et comme ce restant est allumé à ses deux extrémités, il brûle en $(1 - (b - a))/2$ unité de temps (voir l'encadré 1). Au total, la mèche finira de brûler précisément à l'instant:

2

L'ENSEMBLE DES NOMBRES FUSIBLES

L'ensemble F des nombres fusibles est l'ensemble des durées qu'on peut mesurer avec des mèches, comme dessiné dans l'encadré 1. Grâce à la formule qui indique que si a et b sont dans F avec $|a - b| < 1$, alors $(a + b + 1)/2$ est aussi dans F , on trouve plusieurs séries infinies de nombres fusibles.

En A, on a figuré la série $1 - 1/2^n$, qui donne le point limite 1 (voir les calculs dans le texte de l'article). En B, on commence par la série $5/4 - 1/2^{n+1}$, qui donne le point limite $5/4$. Tous les nombres de la forme $3/2 - 1/2^{m+1}$ sont aussi des points limites, et donc le nombre $3/2$ est un point limite de points limites (« point limite double »). On trouve, plus à droite, que $7/4$ est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera « point limite triple ». Et ainsi de suite. Cela conduit à un point limite d'ordre infini en 2.

