

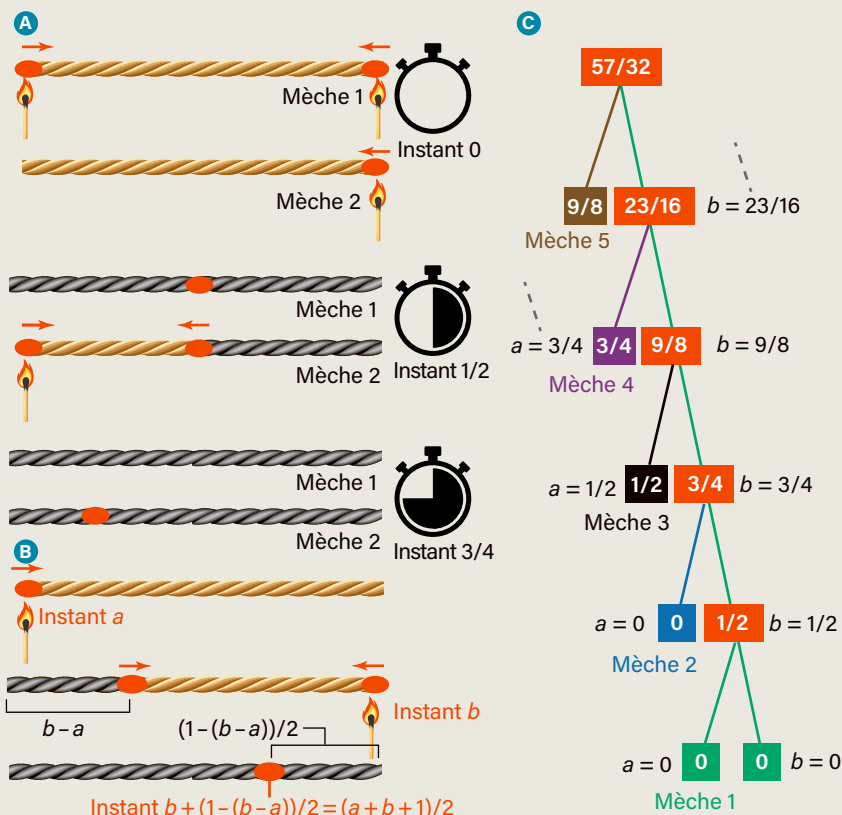
1

MÈCHES SIMPLES

Avec deux mèches brûlant une unité de temps quand on en allume une extrémité, il faut mesurer $3/4$ d'unité de temps. La solution est donnée en A.

En B, on a dessiné le schéma montrant que si l'on connaît des solutions pour les durées a et b avec $|a - b| \leq 1$, on en connaît aussi une pour $(a + b + 1)/2$.

Cette formule est utilisée sur le graphe C pour l'allumage des mèches afin d'obtenir les durées $1/2$, $3/4$, $9/8$, $23/16$, $57/32$. On obtient le temps $1/2$ avec $a = 0$, $b = 0$ (une seule mèche), le temps $3/4$ avec $a = 0$ et $b = 1/2$ (deux mèches), $9/8$ avec $a = 1/2$ et $b = 3/4$ (trois mèches), etc.



Peano». C'est la première fois que cette impuissance apparaît à propos d'un problème aussi élémentaire tiré d'une récréation mathématique. Nous verrons aussi que le problème conduit à la définition d'une fonction aux propriétés inouïes et qui fera plier tout ordinateur, aussi puissant soit-il.

On sait donc maintenant que l'indécidabilité démontrée par le logicien autrichien Kurt Gödel concerne des énoncés élémentaires. Cela montre, pour ceux qui en doutaient encore, qu'elle n'est pas un jeu gratuit de logiciens, mais bien une difficulté sur laquelle tout mathématicien peut tomber par surprise.

DÉFINITION EN UNE LIGNE

L'ensemble F des nombres fusibles se définit par une formule qui tient sur une ligne:

$$0 \in F \text{ et } [a, b \in F \text{ et } |a - b| \leq 1 \Rightarrow (a + b + 1)/2 \in F].$$

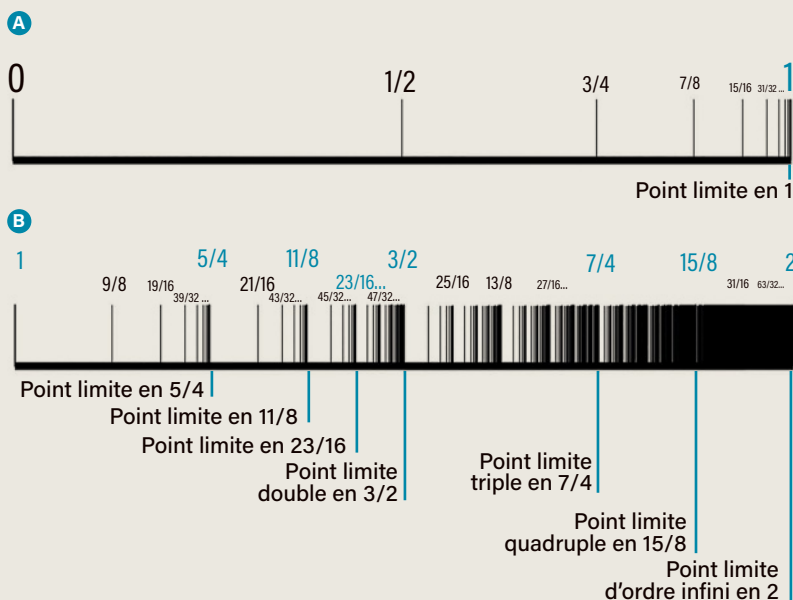
Justifions cette formule. Soit a et b deux nombres fusibles tels que $a < b$ et tels que leur différence soit inférieure à 1, la longueur d'une mèche en unité de temps. Par hypothèse, on sait mesurer les durées a et b . On prend une mèche de plus que celles nécessaires pour mesurer a et b ; on en allume une extrémité à l'instant a , et l'autre extrémité à l'instant b . La mèche brûle donc durant $b - a$ unité de temps avant que sa seconde extrémité soit allumée. La longueur de mèche restante correspond alors à $1 - (b - a)$ unité de temps. Et comme ce restant est allumé à ses deux extrémités, il brûle en $(1 - (b - a))/2$ unité de temps (voir l'encadré 1). Au total, la mèche finira de brûler précisément à l'instant:

2

L'ENSEMBLE DES NOMBRES FUSIBLES

L'ensemble F des nombres fusibles est l'ensemble des durées qu'on peut mesurer avec des mèches, comme dessiné dans l'encadré 1. Grâce à la formule qui indique que si a et b sont dans F avec $|a - b| < 1$, alors $(a + b + 1)/2$ est aussi dans F , on trouve plusieurs séries infinies de nombres fusibles.

En A, on a figuré la série $1 - 1/2^n$, qui donne le point limite 1 (voir les calculs dans le texte de l'article). En B, on commence par la série $5/4 - 1/2^{n+1}$, qui donne le point limite $5/4$. Tous les nombres de la forme $3/2 - 1/2^{m+1}$ sont aussi des points limites, et donc le nombre $3/2$ est un point limite de points limites (« point limite double »). On trouve, plus à droite, que $7/4$ est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera « point limite triple ». Et ainsi de suite. Cela conduit à un point limite d'ordre infini en 2.



$a + (b - a) + (1 - (b - a))/2 = (a + b + 1)/2$. Par commodité, on notera $a \sim b$ pour $(a + b + 1)/2$.

Une autre propriété de F est évidente: si a et b sont des nombres fusibles, alors $a + b$ est aussi un nombre fusible: on prend des mèches pour arriver à l'instant a , puis d'autres mèches pour b , qu'on utilise en commençant à l'instant a ; on atteint alors l'instant $a + b$.

Nous avons vu que 0, $1/2$, $3/4$ et 1 sont des nombres fusibles. Il en est donc de même de toutes les sommes qu'on peut faire avec ces quatre nombres.

Examinons de plus près l'ensemble F . Il contient aussi:

$$\begin{aligned} 0 \sim 3/4 &= 7/8 = 1 - 1/8; \\ 0 \sim 7/8 &= 15/16 = 1 - 1/16; \\ 0 \sim 15/16 &= 31/32 = 1 - 1/32; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Pour tout entier positif n , le nombre $1 - 1/2^n$ est donc dans F . On peut représenter cela comme dans l'encadré 2. Le nombre 1, qui est dans F , est la limite d'une suite croissante de points de F . On dit que 1 est un point limite de points de F . On vérifie que pour tout entier n ,

$1/2 \sim (1 - 1/2^n) = 5/4 - 1/2^{n+1}$, et donc $5/4$ est lui aussi un point limite de points de F . Il en est de même de $11/8$, car $3/4 \sim (1 - 1/2^n) = 11/8 - 1/2^{n+1}$. Plus généralement, $(1 - 1/2^m) \sim (1 - 1/2^n) = 3/2 - 1/2^{m+1} - 1/2^{n+1}$ et donc tous les nombres de la forme $3/2 - 1/2^{m+1}$ sont des points limites.

C'est amusant: le nombre $3/2$ est un point limite de points limites. Nous dirons que c'est un «point limite double» (voir la figure de l'encadré 2).

En poursuivant l'étude, on trouve que $7/4$ est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera «point limite triple». Mais ce n'est pas fini: il existe un point limite quadruple ($15/8$), quintuple ($31/16$), etc. Ces points limites sont de plus en plus serrés les uns contre les autres et s'approchent de 2, ce qui fait de 2 un «point limite d'ordre infini». Regardez attentivement l'encadré 2 et repérez bien cette cascade fascinante de points limites multiples.

Bien sûr, au-delà de 2, les choses empirent et les points de F se tassent encore bien plus

3

LES ORDINAUX DE CANTOR

L'idée des ordinaux de Cantor est que l'on peut sans problème ajouter aux entiers un nombre symbolique ω et décréter qu'il est plus grand que tous les entiers 0, 1, 2, ..., n , ... On obtient un nouvel ensemble ordonné qui a un point à l'infini. On peut de même ajouter un nouveau nombre symbolique $\omega + 1$ et décréter qu'il est plus grand que ω . On ajoute ensuite $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc.

Une fois cet ensemble infini de nouveaux nombres obtenu, on peut à nouveau ajouter un élément symbolique 2ω , puis ajouter encore $2\omega + 1$, puis $2\omega + 2$, ... Au-delà, on arrive à 3ω , $3\omega + 1$, ... Une fois tous les $n\omega$ considérés, on arrive à ω^2 . L'idée se prolonge: on arrive à ω^3 , ω^4 , ..., puis ω^ω , puis encore et encore, bien au-delà de tout ce qu'on peut imaginer. C'est ce qu'on nomme les «ordinaux de Cantor». John von Neumann en a proposé une définition ensembliste (voir le texte) qui rend précise la notion générale. Heureusement, pour comprendre la structure de l'ensemble F des nombres fusibles, il suffit de considérer le processus de génération des ordinaux jusqu'aux tours de ω :

$$\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, \dots$$

L'ordinal qui suit est ε_0 , dont on démontre qu'en un certain sens, c'est un ordinal que les axiomes de l'arithmétique de Peano ne peuvent pas maîtriser. Comme justement l'ensemble des nombres fusibles a la même structure que cet ordinal, certaines des propriétés de F échappent aux axiomes de Peano et sont des indécidables pour l'arithmétique de Peano.

Les figures sont des représentations un peu moins brutales que celles de l'ensemble des nombres fusibles illustré à l'encadré 2. Ces dessins (merci à David Madore de nous avoir autorisés à les utiliser), permettent de visualiser progressivement les ordinaux... du moins les plus petits!

