

# 3

$a + (b - a) + (1 - (b - a))/2 = (a + b + 1)/2$ . Par commodité, on notera  $a \sim b$  pour  $(a + b + 1)/2$ .

Une autre propriété de  $F$  est évidente: si  $a$  et  $b$  sont des nombres fusibles, alors  $a + b$  est aussi un nombre fusible: on prend des mèches pour arriver à l'instant  $a$ , puis d'autres mèches pour  $b$ , qu'on utilise en commençant à l'instant  $a$ ; on atteint alors l'instant  $a + b$ .

Nous avons vu que 0,  $1/2$ ,  $3/4$  et 1 sont des nombres fusibles. Il en est donc de même de toutes les sommes qu'on peut faire avec ces quatre nombres.

Examinons de plus près l'ensemble  $F$ . Il contient aussi:

$$0 \sim 3/4 = 7/8 = 1 - 1/8;$$

$$0 \sim 7/8 = 15/16 = 1 - 1/16;$$

$$0 \sim 15/16 = 31/32 = 1 - 1/32; \text{ etc.}$$

Pour tout entier positif  $n$ , le nombre  $1 - 1/2^n$  est donc dans  $F$ . On peut représenter cela comme dans l'encadré 2. Le nombre 1, qui est dans  $F$ , est la limite d'une suite croissante de points de  $F$ . On dit que 1 est un point limite de points de  $F$ . On vérifie que pour tout entier  $n$ ,

$1/2 \sim (1 - 1/2^n) = 5/4 - 1/2^{n+1}$ , et donc  $5/4$  est lui aussi un point limite de points de  $F$ . Il en est de même de  $11/8$ , car  $3/4 \sim (1 - 1/2^n) = 11/8 - 1/2^{n+1}$ . Plus généralement,  $(1 - 1/2^m) \sim (1 - 1/2^n) = 3/2 - 1/2^{m+1} - 1/2^{n+1}$  et donc tous les nombres de la forme  $3/2 - 1/2^{m+1}$  sont des points limites.

C'est amusant: le nombre  $3/2$  est un point limite de points limites. Nous dirons que c'est un «point limite double» (voir la figure de l'encadré 2).

En poursuivant l'étude, on trouve que  $7/4$  est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera «point limite triple». Mais ce n'est pas fini: il existe un point limite quadruple ( $15/8$ ), quintuple ( $31/16$ ), etc. Ces points limites sont de plus en plus serrés les uns contre les autres et s'approchent de 2, ce qui fait de 2 un «point limite d'ordre infini». Regardez attentivement l'encadré 2 et repérez bien cette cascade fascinante de points limites multiples.

Bien sûr, au-delà de 2, les choses empirent et les points de  $F$  se tassent encore bien plus

## LES ORDINAUX DE CANTOR

L'idée des ordinaux de Cantor est que l'on peut sans problème ajouter aux entiers un nombre symbolique  $\omega$  et décréter qu'il est plus grand que tous les entiers 0, 1, 2, ...,  $n$ , ... On obtient un nouvel ensemble ordonné qui a un point à l'infini. On peut de même ajouter un nouveau nombre symbolique  $\omega + 1$  et décréter qu'il est plus grand que  $\omega$ . On ajoute ensuite  $\omega + 2$ ,  $\omega + 3$ , etc.

Une fois cet ensemble infini de nouveaux nombres obtenu, on peut à nouveau ajouter un élément symbolique  $2\omega$ , puis ajouter encore  $2\omega + 1$ , puis  $2\omega + 2$ , ... Au-delà, on arrive à  $3\omega$ ,  $3\omega + 1$ , ... Une fois tous les  $n\omega$  considérés, on arrive à  $\omega^2$ . L'idée se prolonge: on arrive à  $\omega^3$ ,  $\omega^4$ , ..., puis  $\omega^\omega$ , puis encore et encore, bien au-delà de tout ce qu'on peut imaginer. C'est ce qu'on nomme les «ordinaux de Cantor». John von Neumann en a proposé une définition ensembliste (voir le texte) qui rend précise la notion générale. Heureusement, pour comprendre la structure de l'ensemble  $F$  des nombres fusibles, il suffit de considérer le processus de génération des ordinaux jusqu'aux tours de  $\omega$ :

$$\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, \dots$$

L'ordinal qui suit est  $\varepsilon_0$ , dont on démontre qu'en un certain sens, c'est un ordinal que les axiomes de l'arithmétique de Peano ne peuvent pas maîtriser. Comme justement l'ensemble des nombres fusibles a la même structure que cet ordinal, certaines des propriétés de  $F$  échappent aux axiomes de Peano et sont des indécidables pour l'arithmétique de Peano.

Les figures sont des représentations un peu moins brutales que celles de l'ensemble des nombres fusibles illustré à l'encadré 2. Ces dessins (merci à David Madore de nous avoir autorisés à les utiliser), permettent de visualiser progressivement les ordinaux... du moins les plus petits!

