

# 3

$a + (b - a) + (1 - (b - a))/2 = (a + b + 1)/2$ . Par commodité, on notera  $a \sim b$  pour  $(a + b + 1)/2$ .

Une autre propriété de  $F$  est évidente: si  $a$  et  $b$  sont des nombres fusibles, alors  $a + b$  est aussi un nombre fusible: on prend des mèches pour arriver à l'instant  $a$ , puis d'autres mèches pour  $b$ , qu'on utilise en commençant à l'instant  $a$ ; on atteint alors l'instant  $a + b$ .

Nous avons vu que 0,  $1/2$ ,  $3/4$  et 1 sont des nombres fusibles. Il en est donc de même de toutes les sommes qu'on peut faire avec ces quatre nombres.

Examinons de plus près l'ensemble  $F$ . Il contient aussi:

$$0 \sim 3/4 = 7/8 = 1 - 1/8;$$

$$0 \sim 7/8 = 15/16 = 1 - 1/16;$$

$$0 \sim 15/16 = 31/32 = 1 - 1/32; \text{ etc.}$$

Pour tout entier positif  $n$ , le nombre  $1 - 1/2^n$  est donc dans  $F$ . On peut représenter cela comme dans l'encadré 2. Le nombre 1, qui est dans  $F$ , est la limite d'une suite croissante de points de  $F$ . On dit que 1 est un point limite de points de  $F$ . On vérifie que pour tout entier  $n$ ,

$1/2 \sim (1 - 1/2^n) = 5/4 - 1/2^{n+1}$ , et donc  $5/4$  est lui aussi un point limite de points de  $F$ . Il en est de même de  $11/8$ , car  $3/4 \sim (1 - 1/2^n) = 11/8 - 1/2^{n+1}$ . Plus généralement,  $(1 - 1/2^m) \sim (1 - 1/2^n) = 3/2 - 1/2^{m+1} - 1/2^{n+1}$  et donc tous les nombres de la forme  $3/2 - 1/2^{m+1}$  sont des points limites.

C'est amusant: le nombre  $3/2$  est un point limite de points limites. Nous dirons que c'est un «point limite double» (voir la figure de l'encadré 2).

En poursuivant l'étude, on trouve que  $7/4$  est un point limite de points limites de points limites, qu'on dénommera «point limite triple». Mais ce n'est pas fini: il existe un point limite quadruple ( $15/8$ ), quintuple ( $31/16$ ), etc. Ces points limites sont de plus en plus serrés les uns contre les autres et s'approchent de 2, ce qui fait de 2 un «point limite d'ordre infini». Regardez attentivement l'encadré 2 et repérez bien cette cascade fascinante de points limites multiples.

Bien sûr, au-delà de 2, les choses empirent et les points de  $F$  se tassent encore bien plus

## LES ORDINAUX DE CANTOR

L'idée des ordinaux de Cantor est que l'on peut sans problème ajouter aux entiers un nombre symbolique  $\omega$  et décréter qu'il est plus grand que tous les entiers 0, 1, 2, ...,  $n$ , ... On obtient un nouvel ensemble ordonné qui a un point à l'infini. On peut de même ajouter un nouveau nombre symbolique  $\omega + 1$  et décréter qu'il est plus grand que  $\omega$ . On ajoute ensuite  $\omega + 2$ ,  $\omega + 3$ , etc.

Une fois cet ensemble infini de nouveaux nombres obtenu, on peut à nouveau ajouter un élément symbolique  $2\omega$ , puis ajouter encore  $2\omega + 1$ , puis  $2\omega + 2$ , ... Au-delà, on arrive à  $3\omega$ ,  $3\omega + 1$ , ... Une fois tous les  $n\omega$  considérés, on arrive à  $\omega^2$ . L'idée se prolonge: on arrive à  $\omega^3$ ,  $\omega^4$ , ..., puis  $\omega^\omega$ , puis encore et encore, bien au-delà de tout ce qu'on peut imaginer. C'est ce qu'on nomme les «ordinaux de Cantor». John von Neumann en a proposé une définition ensembliste (voir le texte) qui rend précise la notion générale. Heureusement, pour comprendre la structure de l'ensemble  $F$  des nombres fusibles, il suffit de considérer le processus de génération des ordinaux jusqu'aux tours de  $\omega$ :

$$\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, \dots$$

L'ordinal qui suit est  $\varepsilon_0$ , dont on démontre qu'en un certain sens, c'est un ordinal que les axiomes de l'arithmétique de Peano ne peuvent pas maîtriser. Comme justement l'ensemble des nombres fusibles a la même structure que cet ordinal, certaines des propriétés de  $F$  échappent aux axiomes de Peano et sont des indécidables pour l'arithmétique de Peano.

Les figures sont des représentations un peu moins brutales que celles de l'ensemble des nombres fusibles illustré à l'encadré 2. Ces dessins (merci à David Madore de nous avoir autorisés à les utiliser), permettent de visualiser progressivement les ordinaux... du moins les plus petits!



les uns contre les autres. Cela se produit d'une manière très ordonnée, même si notre esprit a un peu de mal à la saisir.

Le raisonnement mathématique s'impose. Il confirme que l'ensemble des nombres fusibles n'est pas un désordre inextricable, mais un objet soigneusement et rigoureusement agencé. Un premier résultat sur le nombre de mèches nécessaires pour arriver à un nombre fusible  $p$  se démontre par un raisonnement par récurrence. Il prouve que les nombres fusibles appartiennent tous à une catégorie bien particulière de nombres réels.

## À LA RECHERCHE DE L'ORDRE DES NOMBRES FUSIBLES

Ce premier résultat est que  $F$  ne contient que des nombres dyadiques, c'est-à-dire de la forme  $k/2^n$ , où  $k$  et  $n$  sont des entiers positifs. Ils sont l'équivalent pour la numération binaire des nombres décimaux : dans le système binaire, leur écriture est finie.

Pour le démontrer, on suppose que tous les nombres fusibles auxquels on peut accéder en utilisant  $k$  mèches au plus sont dyadiques. On voit, d'après la formule donnant  $a \sim b$ , que c'est encore vrai pour ceux qu'on atteint avec  $k+1$  mèches, et donc c'est vrai pour tous les nombres fusibles.

Une conséquence de ce résultat est que  $F$  contient une infinité dénombrable d'éléments ; autrement dit, ses éléments pourraient être numérotés  $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$

Les deux résultats suivants sont plus difficiles à démontrer. Vous trouverez le détail des raisonnements dans l'article des trois chercheurs cités plus haut (*voir la bibliographie*).

D'abord,  $F$  est fermé au sens topologique, ce qui veut dire que toute suite convergente de nombres fusibles a pour limite un point qui est lui-même un nombre fusible.

Ensuite,  $F$  ne comporte pas de suite décroissante infinie ou, ce qui revient au même : pour tout nombre fusible  $p$ , il existe un nombre  $\varepsilon > 0$  tel que l'intervalle  $]p, p+\varepsilon[$  (c'est-à-dire les nombres  $x$  vérifiant  $p < x < p+\varepsilon$ ) ne contient aucun autre élément de  $F$ .

Dit encore autrement, le dernier résultat signifie qu'il y a des points limites quand on va vers la droite, mais qu'il n'y en a pas quand on va vers la gauche. C'est un peu étonnant, mais en regardant bien le dessin (même seulement jusqu'à  $3/2$ ), on comprend que ça n'est en rien absurde.

Notons aussi qu'entre 0 et 1, il n'y a aucun autre nombre fusible que ceux mentionnés, c'est-à-dire de la forme  $1 - 1/2^n$  avec  $n$  entier.

Ceux qui ont déjà entendu parler des nombres ordinaux de Georg Cantor (1845-1918) ont reconnu que les nombres fusibles sont probablement liés à de tels nombres. C'est effectivement le cas et l'ensemble des nombres

# 4

## UNE FONCTION INDÉCIDABLE ET IMPRATICABLE

Quand on cherche à savoir quel est l'espace ne contenant pas de nombres fusibles derrière les nombres entiers, on tombe sur une fonction qui décroît très rapidement vers 0. Cet espace libre derrière 1 est plus petit que  $M(1) = 1/8$ . Il est plus petit que  $M(2) = 1/2^{10}$  pour l'entier 2, et plus petit que  $M(3) = 1/2^{541\,023\,937}$  pour 3. Pour 4, on ne sait pas le calculer : le calcul devient trop long, même si on sait qu'il est fini.

La fonction qui donne ce majorant a une définition très simple :

Si  $x < 0$ , alors  $M(x) = -x$  ;

si  $x \geq 0$ , alors  $M(x) = M(x - M(x - 1))/2$ .

Pour utiliser cette définition pour une valeur  $x$ , on lance le programme exprimant la définition et on le laisse faire. Il lancera le programme pour d'autres valeurs  $y$ , qui lanceront le programme pour d'autres valeurs, etc. Au bout du compte, quel que soit le  $x$  choisi, le programme conclura – si la puissance de calcul de l'ordinateur est suffisante.

Considérons par exemple le calcul de  $M(1) = M(1 - M(1 - 1))/2$ . Le programme a besoin de  $M(1 - 1) = M(0)$ . Il lance donc le calcul  $M(0) = M(0 - M(-1))/2$ , ce qui lui fait

demande  $M(-1)$ . Le calcul de  $M(-1)$  est immédiat et donne 1. Il peut donc simplifier  $M(0 - M(-1))/2$  qui devient  $M(-1)/2$ , qui se simplifie en  $1/2$  :  $M(0) = 1/2$ . Il doit donc maintenant calculer  $M(1/2) = M(1/2 - M(1/2 - 1))/2$ , etc. La suite du calcul est représentée ci-dessous avec des notations évidentes. Le tout aboutit à  $M(1) = 1/8$ . Deux autres dessins représentent les calculs pour  $M(3/2) = 1/32$  et  $M(2) = 1/1\,024$ . Ça marche, mais ça se complique !

Pour tout nombre réel  $x$ , la fonction  $M$  termine toujours son calcul. Jamais elle ne se met à tourner en rond, ce qui se produirait si  $M(y)$  appelait  $M(y)$ . L'affirmation « la fonction  $M$  termine toujours » se démontre, mais en utilisant des théories plus puissantes que l'arithmétique de Peano. Même en la simplifiant en « la fonction  $M$  termine pour tout entier », c'est une affirmation indécidable de l'arithmétique de Peano.

Avant la découverte de  $M$ , on ne connaissait aucune fonction aussi simple dont le comportement échappait au pouvoir de démonstration de l'arithmétique de Peano.

$M(1)$  :  
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)$  :  
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)=1/4$   
 $M(1)=1/8$

$M(3/2)$  :  
 $M(1/2)$  :  
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)=1/4$   
 $M(5/4)$  :  
 $M(1/4)$  :  
 $M(-3/4)=3/4$   
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(1/4)=1/4$   
 $M(1)$  :  
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)=1/4$   
 $M(1)=1/8$   
 $M(5/4)=1/16$   
 $M(3/2)=1/32$

$M(2)$  :  
 $M(1)$  :  
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)$  :  
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)=1/4$   
 $M(3/4)$  :  
 $M(1/4)=1/4$   
 $M(-3/4)=3/4$   
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(1/4)=1/4$   
 $M(5/4)=1/16$   
 $M(7/4)$  :  
 $M(3/4)$  :  
 $M(-1/4)=1/4$   
 $M(1/2)$  :  
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)=1/4$   
 $M(3/4)=1/8$   
 $M(13/8)$  :  
 $M(5/8)$  :  
 $M(-3/8)=3/8$   
 $M(1/4)$  :  
 $M(-3/4)=3/4$   
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(1/4)=1/4$   
 $M(5/8)=1/8$   
 $M(3/2)$  :  
 $M(1/2)$  :  
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$

$M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)$  :  
 $M(-1/2)=1/2$   
 $M(0)$  :  
 $M(-1)=1$   
 $M(-1)=1$   
 $M(0)=1/2$   
 $M(1/2)=1/4$   
 $M(1)=1/8$   
 $M(5/4)=1/16$   
 $M(3/2)=1/32$   
 $M(13/8)=1/64$   
 $M(7/4)=1/128$   
 $M(29/16)=1/256$   
 $M(15/8)=1/512$   
 $M(2)=1/1024$   
 $M(2) = 2^{-10}$