

les uns contre les autres. Cela se produit d'une manière très ordonnée, même si notre esprit a un peu de mal à la saisir.

Le raisonnement mathématique s'impose. Il confirme que l'ensemble des nombres fusibles n'est pas un désordre inextricable, mais un objet soigneusement et rigoureusement agencé. Un premier résultat sur le nombre de mèches nécessaires pour arriver à un nombre fusible p se démontre par un raisonnement par récurrence. Il prouve que les nombres fusibles appartiennent tous à une catégorie bien particulière de nombres réels.

À LA RECHERCHE DE L'ORDRE DES NOMBRES FUSIBLES

Ce premier résultat est que F ne contient que des nombres dyadiques, c'est-à-dire de la forme $k/2^n$, où k et n sont des entiers positifs. Ils sont l'équivalent pour la numération binaire des nombres décimaux : dans le système binaire, leur écriture est finie.

Pour le démontrer, on suppose que tous les nombres fusibles auxquels on peut accéder en utilisant k mèches au plus sont dyadiques. On voit, d'après la formule donnant $a \sim b$, que c'est encore vrai pour ceux qu'on atteint avec $k+1$ mèches, et donc c'est vrai pour tous les nombres fusibles.

Une conséquence de ce résultat est que F contient une infinité dénombrable d'éléments ; autrement dit, ses éléments pourraient être numérotés $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$

Les deux résultats suivants sont plus difficiles à démontrer. Vous trouverez le détail des raisonnements dans l'article des trois chercheurs cités plus haut (*voir la bibliographie*).

D'abord, F est fermé au sens topologique, ce qui veut dire que toute suite convergente de nombres fusibles a pour limite un point qui est lui-même un nombre fusible.

Ensuite, F ne comporte pas de suite décroissante infinie ou, ce qui revient au même : pour tout nombre fusible p , il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]p, p+\varepsilon[$ (c'est-à-dire les nombres x vérifiant $p < x < p+\varepsilon$) ne contient aucun autre élément de F .

Dit encore autrement, le dernier résultat signifie qu'il y a des points limites quand on va vers la droite, mais qu'il n'y en a pas quand on va vers la gauche. C'est un peu étonnant, mais en regardant bien le dessin (même seulement jusqu'à $3/2$), on comprend que ça n'est en rien absurde.

Notons aussi qu'entre 0 et 1, il n'y a aucun autre nombre fusible que ceux mentionnés, c'est-à-dire de la forme $1 - 1/2^n$ avec n entier.

Ceux qui ont déjà entendu parler des nombres ordinaux de Georg Cantor (1845-1918) ont reconnu que les nombres fusibles sont probablement liés à de tels nombres. C'est effectivement le cas et l'ensemble des nombres

4

UNE FONCTION INDÉCIDABLE ET IMPRATICABLE

Quand on cherche à savoir quel est l'espace ne contenant pas de nombres fusibles derrière les nombres entiers, on tombe sur une fonction qui décroît très rapidement vers 0. Cet espace libre derrière 1 est plus petit que $M(1) = 1/8$. Il est plus petit que $M(2) = 1/2^{10}$ pour l'entier 2, et plus petit que $M(3) = 1/2^{1541\,023\,937}$ pour 3. Pour 4, on ne sait pas le calculer : le calcul devient trop long, même si on sait qu'il est fini.

La fonction qui donne ce majorant a une définition très simple :

Si $x < 0$, alors $M(x) = -x$;

si $x \geq 0$, alors $M(x) = M(x - M(x - 1))/2$.

Pour utiliser cette définition pour une valeur x , on lance le programme exprimant la définition et on le laisse faire. Il lancera le programme pour d'autres valeurs y , qui lanceront le programme pour d'autres valeurs, etc. Au bout du compte, quel que soit le x choisi, le programme conclura – si la puissance de calcul de l'ordinateur est suffisante.

Considérons par exemple le calcul de $M(1) = M(1 - M(1 - 1))/2$. Le programme a besoin de $M(1 - 1) = M(0)$. Il lance donc le calcul $M(0) = M(0 - M(-1))/2$, ce qui lui fait

demander $M(-1)$. Le calcul de $M(-1)$ est immédiat et donne 1. Il peut donc simplifier $M(0 - M(-1))/2$ qui devient $M(-1)/2$, qui se simplifie en $1/2$: $M(0) = 1/2$. Il doit donc maintenant calculer $M(1/2) = M(1/2 - M(1/2 - 1))/2$, etc. La suite du calcul est représentée ci-dessous avec des notations évidentes. Le tout aboutit à $M(1) = 1/8$. Deux autres dessins représentent les calculs pour $M(3/2) = 1/32$ et $M(2) = 1/1\,024$. Ça marche, mais ça se complique !

Pour tout nombre réel x , la fonction M termine toujours son calcul. Jamais elle ne se met à tourner en rond, ce qui se produirait si $M(y)$ appelait $M(y)$. L'affirmation « la fonction M termine toujours » se démontre, mais en utilisant des théories plus puissantes que l'arithmétique de Peano. Même en la simplifiant en « la fonction M termine pour tout entier », c'est une affirmation indécidable de l'arithmétique de Peano.

Avant la découverte de M , on ne connaissait aucune fonction aussi simple dont le comportement échappait au pouvoir de démonstration de l'arithmétique de Peano.

```
M(1):
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(1)=1/8
```

```
M(3/2):
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(5/4):
M(1/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(1/4)=1/4
M(1):
M(3/2):
M(1/2)=1/32

M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(0)=1/2
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(1)=1/8
M(5/4)=1/16
M(3/2)=1/32
```

```
M(2):
M(1):
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(3/4):
M(1)=1/8
M(15/8):
M(7/8):
M(-1/8)=1/8
M(3/4):
M(-1/4)=1/4
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(3/4)=1/8
M(7/8)=1/16
M(15/8)=1/32
M(31/16):
M(-3/16)=3/16
M(5/8):
```

```
M(-3/8)=3/8
M(1/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(1/4)=1/4
M(5/8)=1/8
M(13/16)=1/16
M(7/4):
M(3/4):
M(-1/4)=1/4
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(3/4)=1/8
M(7/8)=1/16
M(15/8)=1/32
M(31/16)=1/64
M(63/32)=1/128
M(127/64)=1/256
M(255/128)=1/512
M(511/256)=1/1024
M(2)=1/1024
```

```
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(5/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(1/4)=1/4
M(1):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(0)=1/2
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(1)=1/8
M(5/4)=1/16
M(3/2)=1/32
M(7/4)=1/64
M(15/8)=1/128
M(31/16)=1/256
M(63/32)=1/512
M(127/64)=1/1024
M(2)=1/1024
```

$$M(2) = 2^{-10}$$