

les uns contre les autres. Cela se produit d'une manière très ordonnée, même si notre esprit a un peu de mal à la saisir.

Le raisonnement mathématique s'impose. Il confirme que l'ensemble des nombres fusibles n'est pas un désordre inextricable, mais un objet soigneusement et rigoureusement agencé. Un premier résultat sur le nombre de mèches nécessaires pour arriver à un nombre fusible p se démontre par un raisonnement par récurrence. Il prouve que les nombres fusibles appartiennent tous à une catégorie bien particulière de nombres réels.

À LA RECHERCHE DE L'ORDRE DES NOMBRES FUSIBLES

Ce premier résultat est que F ne contient que des nombres dyadiques, c'est-à-dire de la forme $k/2^n$, où k et n sont des entiers positifs. Ils sont l'équivalent pour la numération binaire des nombres décimaux : dans le système binaire, leur écriture est finie.

Pour le démontrer, on suppose que tous les nombres fusibles auxquels on peut accéder en utilisant k mèches au plus sont dyadiques. On voit, d'après la formule donnant $a \sim b$, que c'est encore vrai pour ceux qu'on atteint avec $k+1$ mèches, et donc c'est vrai pour tous les nombres fusibles.

Une conséquence de ce résultat est que F contient une infinité dénombrable d'éléments ; autrement dit, ses éléments pourraient être numérotés $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$

Les deux résultats suivants sont plus difficiles à démontrer. Vous trouverez le détail des raisonnements dans l'article des trois chercheurs cités plus haut (*voir la bibliographie*).

D'abord, F est fermé au sens topologique, ce qui veut dire que toute suite convergente de nombres fusibles a pour limite un point qui est lui-même un nombre fusible.

Ensuite, F ne comporte pas de suite décroissante infinie ou, ce qui revient au même : pour tout nombre fusible p , il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]p, p+\varepsilon[$ (c'est-à-dire les nombres x vérifiant $p < x < p+\varepsilon$) ne contient aucun autre élément de F .

Dit encore autrement, le dernier résultat signifie qu'il y a des points limites quand on va vers la droite, mais qu'il n'y en a pas quand on va vers la gauche. C'est un peu étonnant, mais en regardant bien le dessin (même seulement jusqu'à $3/2$), on comprend que ça n'est en rien absurde.

Notons aussi qu'entre 0 et 1, il n'y a aucun autre nombre fusible que ceux mentionnés, c'est-à-dire de la forme $1 - 1/2^n$ avec n entier.

Ceux qui ont déjà entendu parler des nombres ordinaux de Georg Cantor (1845-1918) ont reconnu que les nombres fusibles sont probablement liés à de tels nombres. C'est effectivement le cas et l'ensemble des nombres

4

UNE FONCTION INDÉCIDABLE ET IMPRATICABLE

Quand on cherche à savoir quel est l'espace ne contenant pas de nombres fusibles derrière les nombres entiers, on tombe sur une fonction qui décroît très rapidement vers 0. Cet espace libre derrière 1 est plus petit que $M(1) = 1/8$. Il est plus petit que $M(2) = 1/2^{10}$ pour l'entier 2, et plus petit que $M(3) = 1/2^{1541\,023\,937}$ pour 3. Pour 4, on ne sait pas le calculer : le calcul devient trop long, même si on sait qu'il est fini.

La fonction qui donne ce majorant a une définition très simple :

Si $x < 0$, alors $M(x) = -x$;

si $x \geq 0$, alors $M(x) = M(x - M(x - 1))/2$.

Pour utiliser cette définition pour une valeur x , on lance le programme exprimant la définition et on le laisse faire. Il lancera le programme pour d'autres valeurs y , qui lanceront le programme pour d'autres valeurs, etc. Au bout du compte, quel que soit le x choisi, le programme conclura – si la puissance de calcul de l'ordinateur est suffisante.

Considérons par exemple le calcul de $M(1) = M(1 - M(1 - 1))/2$. Le programme a besoin de $M(1 - 1) = M(0)$. Il lance donc le calcul $M(0) = M(0 - M(-1))/2$, ce qui lui fait

demander $M(-1)$. Le calcul de $M(-1)$ est immédiat et donne 1. Il peut donc simplifier $M(0 - M(-1))/2$ qui devient $M(-1)/2$, qui se simplifie en $1/2$: $M(0) = 1/2$. Il doit donc maintenant calculer $M(1/2) = M(1/2 - M(1/2 - 1))/2$, etc. La suite du calcul est représentée ci-dessous avec des notations évidentes. Le tout aboutit à $M(1) = 1/8$. Deux autres dessins représentent les calculs pour $M(3/2) = 1/32$ et $M(2) = 1/1\,024$. Ça marche, mais ça se complique !

Pour tout nombre réel x , la fonction M termine toujours son calcul. Jamais elle ne se met à tourner en rond, ce qui se produirait si $M(y)$ appelait $M(y)$. L'affirmation « la fonction M termine toujours » se démontre, mais en utilisant des théories plus puissantes que l'arithmétique de Peano. Même en la simplifiant en « la fonction M termine pour tout entier », c'est une affirmation indécidable de l'arithmétique de Peano.

Avant la découverte de M , on ne connaissait aucune fonction aussi simple dont le comportement échappait au pouvoir de démonstration de l'arithmétique de Peano.

```
M(1):
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(1):
M(1)=1/8
```

```
M(3/2):
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(5/4):
M(1/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(1/4)=1/4
M(1):
M(3/2)=1/32

M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(1)=1/8
M(5/4)=1/16
M(3/2)=1/32
```

```
M(2):
M(1):
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(3/4):
M(1)=2/8
M(15/8):
M(7/8):
M(-1/8)=1/8
M(3/4):
M(-1/4)=1/4
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(3/4)=1/8
M(7/8)=1/16
M(29/16):
M(13/16):
M(-3/16)=3/16
M(5/8):
```

```
M(-3/8)=3/8
M(1/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(3/4)=1/4
M(5/8)=1/8
M(13/16)=1/16
M(7/4):
M(3/4):
M(-1/4)=1/4
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(3/4)=1/8
M(13/8):
M(5/8):
M(-3/8)=3/8
M(1/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(1/4)=1/4
M(5/8)=1/8
M(3/2):
M(1/2):
M(-1/2)=1/2
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
```

```
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(5/4):
M(1/4):
M(-3/4)=3/4
M(-1/2)=1/2
M(1/4)=1/4
M(0):
M(-1)=1
M(-1)=1
M(0)=1/2
M(1/2)=1/4
M(1)=1/8
M(5/4)=1/16
M(3/2)=1/32
M(13/8)=1/64
M(7/4)=1/128
M(29/16)=1/256
M(15/8)=1/512
M(2)=1/1024

M(2) = 2-10
```

fusibles possède une structure équivalente à celle de l'ordinal ϵ_0 dont nous allons expliquer la nature.

Certains ensembles ordonnés E ont la propriété d'être «bien ordonnés», ce qui veut dire que tout sous-ensemble de E possède un plus petit élément. C'est le cas de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls. Il est en effet bien clair que tout sous-ensemble S de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément: il y a un plus petit nombre impair, qui est 1; il y a un plus petit nombre entier à la fois multiple de 2, 3 et 5, qui est 30; etc. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, lui, n'est pas bien ordonné car, par exemple, le sous-ensemble constitué des nombres réels strictement positifs n'a pas de plus petit élément.

LES ORDINAUX DE CANTOR À LA RESCOUSSE

Les ordinaux découverts par Cantor désignent les différentes sortes d'ensembles bien ordonnés. En utilisant la notation proposée par le mathématicien d'origine hongroise John von Neumann, il y a d'abord les ordinaux finis $0, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}$, etc. L'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ muni de la relation d'ordre $0 < 1 < 2 < \dots < n$ est, pour von Neumann, l'ordinal $n+1$.

L'ensemble de tous les entiers, nous l'avons dit, est bien ordonné. On le note ω dans ce contexte. En prenant l'ensemble des entiers auquel on ajoute ω (considéré comme un élément), on obtient l'ordinal noté $\omega+1$, qui est $\{0, 1, \dots, n, \dots\} \cup \{\omega\}$, soit $\{\omega, 0, 1, \dots, n, \dots\}$. Cet ensemble est effectivement bien ordonné si l'on convient que ω est un nombre nouveau ajouté aux entiers et qu'il est plus grand que tous les entiers.

L'ordinal ω est le premier ordinal transfini de Cantor. L'ordinal $\omega+1$ est le second ordinal transfini de Cantor. On continue de la même façon en posant, pour tout entier positif n :

$$\omega + (n+1) = (\omega + n) \cup \{\omega + n\}.$$

Arrivé à ce point, on a une double série infinie d'inégalités :

$$0 < 1 < 2 < \dots < n < \dots < \omega$$

$$< \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < \dots < \omega + n < \dots$$

Sans surprise, en regroupant tous ces ordinaux, on en obtient un autre: 2ω . Pour des raisons techniques, on préfère souvent le noter $\omega 2$, mais nous n'utiliserons pas cette convention.

Si, maintenant, vous regardez l'encadré 2 en ne considérant que les nombres fusibles jusqu'à 1 non inclus, vous reconnaîtrez que c'est un ensemble bien ordonné de type ω , c'est-à-dire du même type que $\mathbb{N}$. En ajoutant le nombre 1, c'est un ensemble bien ordonné de type $\omega+1$.

Toujours en examinant l'encadré 2 et cette fois en ne considérant que les nombres fusibles jusqu'à $5/4$ non inclus, vous reconnaîtrez que

c'est un ensemble bien ordonné de type: $2\omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\} \cup \{\omega, \omega+1, \dots, \omega+n, \dots\}$. En allant jusqu'à $11/8$, on a 3ω . Jusqu'à $23/16$, on a 4ω . Ne cherchez pas à aller trop vite, regardez bien le dessin.

Au-delà de tous les $n\omega$, n entier, on a ω^2 , qui est le type d'ordre des nombres fusibles jusqu'à $3/2$. C'est lui qui nous a fait utiliser les mots «point limite double». Plus loin, le point limite triple $7/4$ correspond à l'ordinal ω^3 . Au point limite quadruple $15/8$ correspond l'ordinal ω^4 , puis, au-delà de tous ces points limites multiples, on arrive à 2 auquel correspond l'ordinal ω^ω .

Est-ce tout? Non, car au-delà de 2 la construction se poursuit. Les nombres fusibles sont de plus en plus serrés. C'est assez difficile à imaginer avec précision, mais c'est pourtant la structure de F ! On tombe sur des tours de ω :

$$\omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \text{ etc.}$$

Plus grand que tous ces ordinaux colossaux, juste au-dessus, se trouve celui que l'on note ϵ_0 , qui est l'ordinal correspondant à l'ordre sur les nombres fusibles. Il y a bien d'autres ordinaux encore au-delà de ϵ_0 , mais ils ne concernent plus les nombres fusibles. La totalité des nombres fusibles a un type d'ordre correspondant à ϵ_0 , et c'est déjà pas mal!

UN ÉNONCÉ INDÉCIDABLE DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO

Le dire est facile, le démontrer est plus difficile. C'est pourtant ce qu'ont fait les chercheurs autour de Jeff Erickson. Cependant, ils ont obtenu mieux encore. Ils ont considéré la conséquence évidente de ce résultat concernant F et ϵ_0 . L'énoncé G : «Pour tout entier naturel n , il existe un plus petit nombre fusible supérieur à n », et ils ont démontré que même si l'énoncé G s'exprime dans le langage de l'arithmétique de Peano, celle-ci ne peut pas démontrer G . Autrement dit, l'affirmation G est un indécidable de l'arithmétique de Peano.

L'arithmétique de Peano est la théorie dont on se sert pour traiter des nombres entiers et des objets finis, et démontrer leurs propriétés et relations. Les axiomes de Peano contiennent les définitions de l'addition et de la multiplication des entiers et affirment l'exactitude du principe de raisonnement par récurrence. On a démontré que l'arithmétique de Peano est une théorie équivalente, en capacité de démonstration, à la théorie des ensembles dont on enlève l'axiome qui affirme qu'il existe des ensembles infinis pour le remplacer par l'axiome qui affirme que tous les ensembles sont finis.

On a espéré que cette théorie ne laisse échapper aucune affirmation vraie concernant les entiers et les objets finis. Les axiomes de