

fusibles possède une structure équivalente à celle de l'ordinal ϵ_0 dont nous allons expliquer la nature.

Certains ensembles ordonnés E ont la propriété d'être « bien ordonnés », ce qui veut dire que tout sous-ensemble de E possède un plus petit élément. C'est le cas de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs ou nuls. Il est en effet bien clair que tout sous-ensemble S de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : il y a un plus petit nombre impair, qui est 1 ; il y a un plus petit nombre entier à la fois multiple de 2, 3 et 5, qui est 30 ; etc. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, lui, n'est pas bien ordonné car, par exemple, le sous-ensemble constitué des nombres réels strictement positifs n'a pas de plus petit élément.

LES ORDINAUX DE CANTOR À LA RESCOUSSE

Les ordinaux découverts par Cantor désignent les différentes sortes d'ensembles bien ordonnés. En utilisant la notation proposée par le mathématicien d'origine hongroise John von Neumann, il y a d'abord les ordinaux finis $0, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}$, etc. L'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ muni de la relation d'ordre $0 < 1 < 2 < \dots < n$ est, pour von Neumann, l'ordinal $n+1$.

L'ensemble de tous les entiers, nous l'avons dit, est bien ordonné. On le note ω dans ce contexte. En prenant l'ensemble des entiers auquel on ajoute ω (considéré comme un élément), on obtient l'ordinal noté $\omega+1$, qui est $\{0, 1, \dots, n, \dots\} \cup \{\omega\}$, soit $\{\omega, 0, 1, \dots, n, \dots\}$. Cet ensemble est effectivement bien ordonné si l'on convient que ω est un nombre nouveau ajouté aux entiers et qu'il est plus grand que tous les entiers.

L'ordinal ω est le premier ordinal transfini de Cantor. L'ordinal $\omega+1$ est le second ordinal transfini de Cantor. On continue de la même façon en posant, pour tout entier positif n :

$$\omega + (n+1) = (\omega + n) \cup \{\omega + n\}.$$

Arrivé à ce point, on a une double série infinie d'inégalités :

$$0 < 1 < 2 < \dots < n < \dots < \omega$$

$$< \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < \dots < \omega + n < \dots$$

Sans surprise, en regroupant tous ces ordinaux, on en obtient un autre : 2ω . Pour des raisons techniques, on préfère souvent le noter $\omega 2$, mais nous n'utiliserons pas cette convention.

Si, maintenant, vous regardez l'encadré 2 en ne considérant que les nombres fusibles jusqu'à 1 non inclus, vous reconnaîtrez que c'est un ensemble bien ordonné de type ω , c'est-à-dire du même type que $\mathbb{N}$. En ajoutant le nombre 1, c'est un ensemble bien ordonné de type $\omega+1$.

Toujours en examinant l'encadré 2 et cette fois en ne considérant que les nombres fusibles jusqu'à $5/4$ non inclus, vous reconnaîtrez que

c'est un ensemble bien ordonné de type : $2\omega = \{0, 1, \dots, n, \dots\} \cup \{\omega, \omega+1, \dots, \omega+n, \dots\}$. En allant jusqu'à $11/8$, on a 3ω . Jusqu'à $23/16$, on a 4ω . Ne cherchez pas à aller trop vite, regardez bien le dessin.

Au-delà de tous les $n\omega$, n entier, on a ω^2 , qui est le type d'ordre des nombres fusibles jusqu'à $3/2$. C'est lui qui nous a fait utiliser les mots « point limite double ». Plus loin, le point limite triple $7/4$ correspond à l'ordinal ω^3 . Au point limite quadruple $15/8$ correspond l'ordinal ω^4 , puis, au-delà de tous ces points limites multiples, on arrive à 2 auquel correspond l'ordinal ω^ω .

Est-ce tout ? Non, car au-delà de 2 la construction se poursuit. Les nombres fusibles sont de plus en plus serrés. C'est assez difficile à imaginer avec précision, mais c'est pourtant la structure de F ! On tombe sur des tours de ω :

$$\omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \text{ etc.}$$

Plus grand que tous ces ordinaux colossaux, juste au-dessus, se trouve celui que l'on note ϵ_0 , qui est l'ordinal correspondant à l'ordre sur les nombres fusibles. Il y a bien d'autres ordinaux encore au-delà de ϵ_0 , mais ils ne concernent plus les nombres fusibles. La totalité des nombres fusibles a un type d'ordre correspondant à ϵ_0 , et c'est déjà pas mal !

UN ÉNONCÉ INDÉCIDABLE DANS L'ARITHMÉTIQUE DE PEANO

Le dire est facile, le démontrer est plus difficile. C'est pourtant ce qu'ont fait les chercheurs autour de Jeff Erickson. Cependant, ils ont obtenu mieux encore. Ils ont considéré la conséquence évidente de ce résultat concernant F et ϵ_0 . L'énoncé G : « Pour tout entier naturel n , il existe un plus petit nombre fusible supérieur à n », et ils ont démontré que même si l'énoncé G s'exprime dans le langage de l'arithmétique de Peano, celle-ci ne peut pas démontrer G . Autrement dit, l'affirmation G est un indécidable de l'arithmétique de Peano.

L'arithmétique de Peano est la théorie dont on se sert pour traiter des nombres entiers et des objets finis, et démontrer leurs propriétés et relations. Les axiomes de Peano contiennent les définitions de l'addition et de la multiplication des entiers et affirment l'exactitude du principe de raisonnement par récurrence. On a démontré que l'arithmétique de Peano est une théorie équivalente, en capacité de démonstration, à la théorie des ensembles dont on enlève l'axiome qui affirme qu'il existe des ensembles infinis pour le remplacer par l'axiome qui affirme que tous les ensembles sont finis.

On a espéré que cette théorie ne laisse échapper aucune affirmation vraie concernant les entiers et les objets finis. Les axiomes de

Peano permettent par exemple de prouver qu'il existe des nombres premiers aussi grands qu'on le veut, et bien d'autres propriétés concernant les graphes qui sont des objets mathématiques finis.

Les théorèmes d'incomplétude démontrés par Gödel en 1931 établissent cependant que l'arithmétique de Peano n'est pas suffisante pour tout savoir des nombres entiers ou des structures finies. Il existe des énoncés, provenant de considérations logiques ou mentionnant des autoréférences et portant uniquement sur les nombres entiers, que les axiomes de Peano ne peuvent pas démontrer, et qui pourtant sont vrais. On sait que de tels énoncés sont vrais, car on les démontre en utilisant des systèmes d'axiomes plus puissants en lesquels on a confiance, comme celui de la théorie des ensembles avec axiome de l'infini.

Même si les nombres fusibles sont des nombres réels, on peut exprimer et démontrer certaines de leurs propriétés en utilisant les axiomes de Peano, ou la théorie des ensembles finis. Il est facile par exemple de démontrer, comme on l'a fait plus haut, que tout nombre fusible est dyadique. L'affirmation G mentionnée précédemment s'exprime dans le formalisme de ces théories, et donc on pouvait espérer qu'elle s'y démontre. Pourtant, G n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano!

D'autres résultats d'indécidabilité vis-à-vis de Peano concernant des énoncés naturels et n'impliquant pas de notions de logiques mathématiques ont été obtenus en 1977 par Jeff Paris et Leo Harrington. Quelques autres ont suivi. Cela a établi d'une manière assez satisfaisante que, contrairement à ce qui avait été envisagé, certains indécidables ne proviennent pas de raisonnements utilisant des autoréférences logiques qu'un arithméticien n'envisage jamais de lui-même. Pourtant, aucun indécidable connu de l'arithmétique de Peano n'avait cette simplicité du résultat sur l'existence d'un plus petit nombre fusible derrière chaque entier, et aucun ne provient d'un problème de mathématique récréative qu'on peut expliquer en une minute autour d'une tasse de café à ses amis non mathématiciens. L'indécidabilité est donc bien une situation qui peut surgir partout en mathématiques.

UNE FONCTION RÉCURSIVE TRÈS DIFFICILEMENT CALCULABLE

En étudiant la façon dont se serrent de plus en plus les nombres fusibles quand on va vers la droite, nos trois chercheurs ont découvert une fonction d'une simplicité parfaite à laquelle est associé un algorithme très simple, mais dont l'arrêt ne peut pas se démontrer avec l'arithmétique de Peano, même quand on se limite à n'envisager que des nombres entiers pour la variable. Cette fonction

associe un nombre réel $M(x)$ à tout nombre réel x . Quelques symboles la définissent :

Si $x < 0$, alors $M(x) = -x$;

si $x \geq 0$, alors $M(x) = M(x - M(x - 1)) / 2$.

Il s'agit d'une définition récursive, à l'instar de la fonction factorielle définie sur les entiers naturels, que l'on notera ici $\text{fact}(n)$: si $n = 0$, alors $\text{fact}(n) = 1$, sinon $\text{fact}(n) = n \text{fact}(n - 1)$.

De telles définitions sont courantes en informatique où les langages de programmation les autorisent. Dans le cas de la fonction factorielle, on comprend bien que demander par exemple $\text{fact}(3)$ provoque l'appel de $\text{fact}(2)$, qui provoque l'appel de $\text{fact}(1)$, qui provoque l'appel de $\text{fact}(0)$, qui donne une réponse et conduit alors à la réponse pour $\text{fact}(1)$, puis pour $\text{fact}(2)$, puis pour $\text{fact}(3)$. Pour tout entier n , l'appel de $\text{fact}(n)$ conduit au résultat parce que l'ordinateur comprend la définition récursive et sait l'exploiter.

Dans le cas de la fonction M , c'est un peu plus compliqué, mais cela fonctionne aussi très bien (voir l'encadré 4). L'équipe autour de Jeff Erickson a démontré que quel que soit le nombre réel x , les appels que provoque la demande du calcul de $M(x)$ finissent par aboutir et produisent le résultat. Il n'y a jamais d'appels à l'infini qui empêcheraient le calcul de $M(x)$.

J'ai programmé cette fonction. J'ai pu calculer $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, mais, pour $M(3)$, malgré une optimisation soignée de mon programme, le calcul demandé ne semble pas aboutir. Quand je demande $M(3)$ à mon ordinateur, après quelques minutes, il met en marche le ventilateur de refroidissement du microprocesseur et je juge prudent d'arrêter le calcul. Le calcul devrait aboutir, c'est démontré, mais il est trop long et complexe pour ma machine. Bien que $M(4)$ provoque en théorie un calcul fini, aucun ordinateur ne le fera peut-être jamais, et si $M(4)$ devient un jour calculable réellement, ce ne sera pas le cas du calcul de $M(5)$ encore colossalement plus difficile à faire aboutir.

Définie en quelques symboles, la fonction M donne un résultat pour tout nombre x , mais la démonstration de ce bon fonctionnement exige des outils mathématiques plus puissants que ceux de l'arithmétique de Peano : l'arrêt du calcul de $M(x)$, même en ne considérant que des x entiers, est un indécidable pour Peano. Alan Turing a démontré que l'arrêt des programmes était un problème algorithmiquement indécidable, dont on déduit que certains programmes ne s'arrêtent pas, ce que l'arithmétique de Peano ne sait pas démontrer. Ici, on a un résultat du même type, d'une simplicité parfaite et qui n'est pas né de considérations logiques plus ou moins tordues, mais de l'étude de l'ensemble des nombres fusibles, une énigme simplissime de mathématiques récréatives. C'est certain maintenant, l'indécidabilité peut surgir partout! ■

BIBLIOGRAPHIE

G. Nivasch, **Vidéo d'un exposé détaillé et pédagogique sur les nombres fusibles** : <http://www.youtube.com/watch?v=FjMNjMCmjP4>

J. Erickson, G. Nivasch et J. Xu, **Fusible numbers and Peano arithmetic**, LICS'2021 (Logic in Computer Science, 2021, Rome), prépublication arXiv:2003.14342, 2020.

J. Erickson, **Fusible numbers**, 2020 : <http://www.mathpuzzle.com/fusible.pdf>

Wikipédia, **Nombre ordinal**, (https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_ordinal), 2021.

Frank Morgan's Math Chat, **Burning 1-hour fuses in 45 minutes**, 1999 : <https://bit.ly/3hxyNDS>

J.-P. Delahaye, **Information, complexité et hasard** (chap. 6 : L'importance des indécidables), Hermès, 1994.

J. Paris et L. Harrington, **A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic**, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 90, pp. 1133-1142, 1977.