

Peano permettent par exemple de prouver qu'il existe des nombres premiers aussi grands qu'on le veut, et bien d'autres propriétés concernant les graphes qui sont des objets mathématiques finis.

Les théorèmes d'incomplétude démontrés par Gödel en 1931 établissent cependant que l'arithmétique de Peano n'est pas suffisante pour tout savoir des nombres entiers ou des structures finies. Il existe des énoncés, provenant de considérations logiques ou mentionnant des autoréférences et portant uniquement sur les nombres entiers, que les axiomes de Peano ne peuvent pas démontrer, et qui pourtant sont vrais. On sait que de tels énoncés sont vrais, car on les démontre en utilisant des systèmes d'axiomes plus puissants en lesquels on a confiance, comme celui de la théorie des ensembles avec axiome de l'infini.

Même si les nombres fusibles sont des nombres réels, on peut exprimer et démontrer certaines de leurs propriétés en utilisant les axiomes de Peano, ou la théorie des ensembles finis. Il est facile par exemple de démontrer, comme on l'a fait plus haut, que tout nombre fusible est dyadique. L'affirmation G mentionnée précédemment s'exprime dans le formalisme de ces théories, et donc on pouvait espérer qu'elle s'y démontre. Pourtant, G n'est pas démontrable dans l'arithmétique de Peano!

D'autres résultats d'indécidabilité vis-à-vis de Peano concernant des énoncés naturels et n'impliquant pas de notions de logiques mathématiques ont été obtenus en 1977 par Jeff Paris et Leo Harrington. Quelques autres ont suivi. Cela a établi d'une manière assez satisfaisante que, contrairement à ce qui avait été envisagé, certains indécidables ne proviennent pas de raisonnements utilisant des autoréférences logiques qu'un arithméticien n'envisage jamais de lui-même. Pourtant, aucun indécidable connu de l'arithmétique de Peano n'avait cette simplicité du résultat sur l'existence d'un plus petit nombre fusible derrière chaque entier, et aucun ne provient d'un problème de mathématique récréative qu'on peut expliquer en une minute autour d'une tasse de café à ses amis non mathématiciens. L'indécidabilité est donc bien une situation qui peut surgir partout en mathématiques.

UNE FONCTION RÉCURSIVE TRÈS DIFFICILEMENT CALCULABLE

En étudiant la façon dont se serrent de plus en plus les nombres fusibles quand on va vers la droite, nos trois chercheurs ont découvert une fonction d'une simplicité parfaite à laquelle est associé un algorithme très simple, mais dont l'arrêt ne peut pas se démontrer avec l'arithmétique de Peano, même quand on se limite à n'envisager que des nombres entiers pour la variable. Cette fonction

associe un nombre réel $M(x)$ à tout nombre réel x . Quelques symboles la définissent :

Si $x < 0$, alors $M(x) = -x$;
si $x \geq 0$, alors $M(x) = M(x - M(x - 1)) / 2$.

Il s'agit d'une définition récursive, à l'instar de la fonction factorielle définie sur les entiers naturels, que l'on notera ici $\text{fact}(n)$: si $n = 0$, alors $\text{fact}(n) = 1$, sinon $\text{fact}(n) = n \text{fact}(n - 1)$.

De telles définitions sont courantes en informatique où les langages de programmation les autorisent. Dans le cas de la fonction factorielle, on comprend bien que demander par exemple $\text{fact}(3)$ provoque l'appel de $\text{fact}(2)$, qui provoque l'appel de $\text{fact}(1)$, qui provoque l'appel de $\text{fact}(0)$, qui donne une réponse et conduit alors à la réponse pour $\text{fact}(1)$, puis pour $\text{fact}(2)$, puis pour $\text{fact}(3)$. Pour tout entier n , l'appel de $\text{fact}(n)$ conduit au résultat parce que l'ordinateur comprend la définition récursive et sait l'exploiter.

Dans le cas de la fonction M , c'est un peu plus compliqué, mais cela fonctionne aussi très bien (voir l'encadré 4). L'équipe autour de Jeff Erickson a démontré que quel que soit le nombre réel x , les appels que provoque la demande du calcul de $M(x)$ finissent par aboutir et produisent le résultat. Il n'y a jamais d'appels à l'infini qui empêcheraient le calcul de $M(x)$.

J'ai programmé cette fonction. J'ai pu calculer $M(0)$, $M(1)$, $M(2)$, mais, pour $M(3)$, malgré une optimisation soignée de mon programme, le calcul demandé ne semble pas aboutir. Quand je demande $M(3)$ à mon ordinateur, après quelques minutes, il met en marche le ventilateur de refroidissement du microprocesseur et je juge prudent d'arrêter le calcul. Le calcul devrait aboutir, c'est démontré, mais il est trop long et complexe pour ma machine. Bien que $M(4)$ provoque en théorie un calcul fini, aucun ordinateur ne le fera peut-être jamais, et si $M(4)$ devient un jour calculable réellement, ce ne sera pas le cas du calcul de $M(5)$ encore colossalement plus difficile à faire aboutir.

Définie en quelques symboles, la fonction M donne un résultat pour tout nombre x , mais la démonstration de ce bon fonctionnement exige des outils mathématiques plus puissants que ceux de l'arithmétique de Peano : l'arrêt du calcul de $M(x)$, même en ne considérant que des x entiers, est un indécidable pour Peano. Alan Turing a démontré que l'arrêt des programmes était un problème algorithmiquement indécidable, dont on déduit que certains programmes ne s'arrêtent pas, ce que l'arithmétique de Peano ne sait pas démontrer. Ici, on a un résultat du même type, d'une simplicité parfaite et qui n'est pas né de considérations logiques plus ou moins tordues, mais de l'étude de l'ensemble des nombres fusibles, une énigme simplissime de mathématiques récréatives. C'est certain maintenant, l'indécidabilité peut surgir partout! ■

BIBLIOGRAPHIE

G. Nivasch, **Vidéo d'un exposé détaillé et pédagogique sur les nombres fusibles** : <http://www.youtube.com/watch?v=FjMNjMCmjP4>

J. Erickson, G. Nivasch et J. Xu, **Fusible numbers and Peano arithmetic**, LICS'2021 (Logic in Computer Science, 2021, Rome), prépublication arXiv:2003.14342, 2020.

J. Erickson, **Fusible numbers**, 2020 : <http://www.mathpuzzle.com/fusible.pdf>

Wikipédia, **Nombre ordinal**, (https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_ordinal), 2021.

Frank Morgan's Math Chat, **Burning 1-hour fuses in 45 minutes**, 1999 : <https://bit.ly/3hxyNDS>

J.-P. Delahaye, **Information, complexité et hasard** (chap. 6 : L'importance des indécidables), Hermès, 1994.

J. Paris et L. Harrington, **A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic**, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, vol. 90, pp. 1133-1142, 1977.