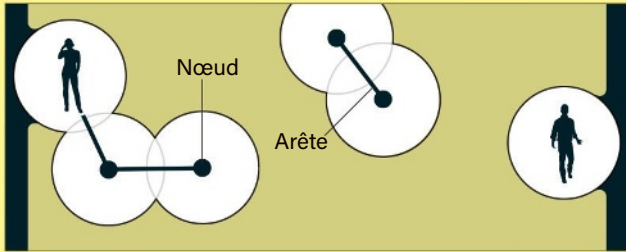
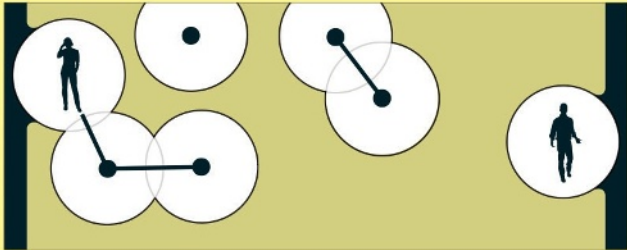


Transition de phase

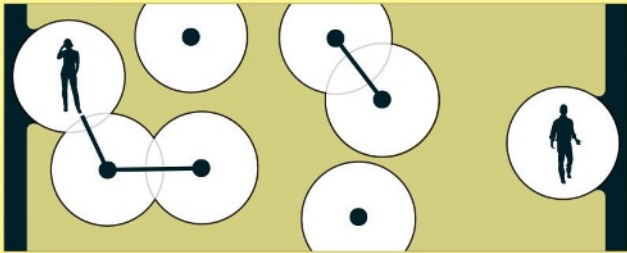
Nombre de nœuds = 6



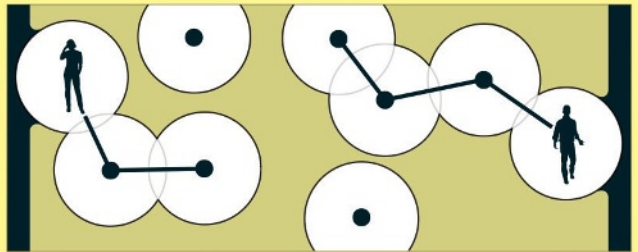
Nombre de nœuds = 7



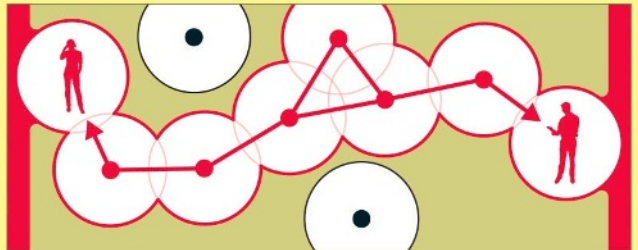
Nombre de nœuds = 8



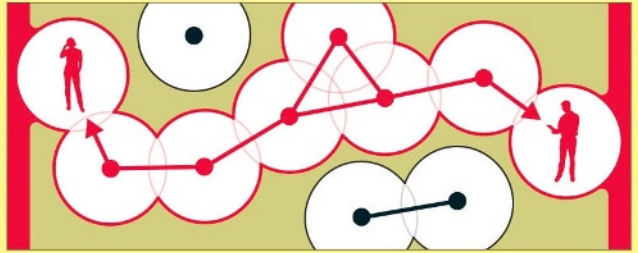
Nombre de nœuds = 9



Nombre de nœuds = 10



Nombre de nœuds = 11



des calculs complexes, mais eux aussi présentent des transitions, quoique plus douces. Tandis que le monde devient de plus en plus connecté par des couches complexes de liaisons qui transportent les gens, leur apportent de l'énergie au moyen de réseaux électriques, leur permettent de communiquer au sein de réseaux sociaux en ligne, leur transmettent parfois des virus, la théorie de la percolation ne cesse de gagner en pertinence.

ET LA CONNEXION DEVIENT GLOBALE

En 1957, les ingénieurs britanniques Simon Broadbent et John Hammersley ont initialement formulé la théorie de la percolation comme un problème purement mathématique. Ils ont transposé au niveau abstrait l'étude de la percolation en physicochimie, phénomène qui désigne l'écoulement d'un fluide à travers un milieu solide perméable, comme de l'huile ou du pétrole s'infiltrant à travers de la roche poreuse, ou comme l'eau traversant le café moulu dans une cafetière. Dans le réseau de percolation d'une couche rocheuse, les nœuds correspondent aux petits pores dans la structure, et les arêtes correspondent aux canaux ou fissures qui permettent au fluide de s'écouler entre les trous. Sans surprise, l'huile ou le pétrole s'écoulent plus loin quand la roche est davantage fracturée.

Quand le nombre de nœuds dépasse un certain seuil, ici 10, il y a percolation (en rouge).

Broadbent et Hammersley ont prédit que dans une roche idéalisée, le fluide gagne de petites régions seulement, mais s'infiltre dans la quasi-totalité de la roche dès que la densité de fissures dépasse un certain seuil.

Les géologues utilisent une version de la théorie de la percolation pour étudier la taille des amas de nœuds connectés dans des roches fracturées, ce qui est important pour l'extraction du pétrole par fracturation hydraulique, ou pour prévoir la survenue de séismes. Afin de modéliser les tremblements de terre, les sismologues considèrent des réseaux de percolation qui reproduisent l'échelle et la densité des fissures observées, et simulent les contraintes mécaniques en ajustant la probabilité que les fissures se connectent. À mesure que les contraintes et les liaisons augmentent, les amas grossissent jusqu'à ce que, brusquement et de façon imprévisible, un séisme frappe. Des versions modifiées des processus de percolation permettent aux fissures de se réparer et de se refracturer afin de simuler les secousses secondaires ou des changements à long terme.

La théorie de la percolation éclaire également des processus physiques et chimiques à beaucoup plus petite échelle, comme la polymérisation, c'est-à-dire le processus par lequel de petites molécules simples, les «monomères», se lient chimiquement pour former des molécules

beaucoup plus grosses, les polymères. Dans le cadre de la théorie de la percolation, chaque monomère constitue un nœud, et deux monomères voisins peuvent spontanément former une liaison, assimilée à une arête du réseau. Si la probabilité que deux monomères se lient augmente, le système finira par atteindre le seuil de percolation, et un unique polymère géant émergera. C'est ce processus qui est à l'œuvre quand de la gélatine en poudre dissoute dans de l'eau forme une gelée.

Les réseaux que l'on trouve dans de la roche fracturée ou dans les polymères liés sont extrêmement complexes. Il serait presque impossible de décrire précisément leur structure, mais Broadbent et Hammersley ont montré qu'on peut en faire une approximation sous forme de motifs répétitifs et qui se prêtent à l'analyse. L'exemple le plus simple est celui d'un réseau carré : les nœuds sont disposés aux points d'intersection d'un quadrillage, chacun étant connecté à ses voisins par quatre arêtes.

AMAS D'ÉLÉMENTS LIÉS

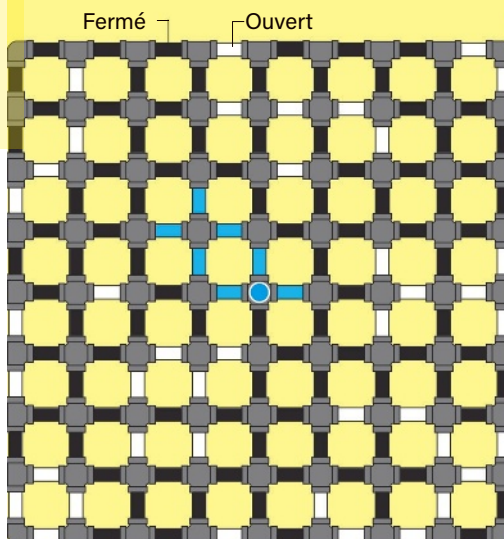
Pour voir comment un fluide se propagerait à travers un tel réseau, imaginons que chaque arête soit un tuyau, et que ce tuyau est soit ouvert, soit fermé. On peut choisir au hasard l'état de chaque tuyau en tirant à pile ou face. Le paysage résultant de tuyaux ouverts et fermés sera un réseau aléatoire, et il aura des amas « ouverts », dans lesquels tous les nœuds sont reliés par une série de tuyaux ouverts. Si vous versez de l'eau dans n'importe lequel des nœuds d'un tel amas, elle va couler dans tous les tuyaux ouverts et atteindre tous les autres nœuds de l'amas.

La théorie de la percolation s'intéresse à la connectivité du réseau, qui correspond à la grosseur des amas ouverts. Mais la « grosseur » est un concept ambigu et difficile à intégrer au formalisme mathématique. C'est pourquoi les mathématiciens remplacent souvent les grands nombres par des infinis. La question centrale devient alors : existe-t-il un amas infini ? « Pour nous, il est beaucoup plus facile de répondre à cette question binaire que de dire combien de gros amas de telle ou telle taille nous voyons », explique Benedikt Jahnel, mathématicien à l'institut Weierstrass d'analyse appliquée et de stochastique, à Berlin.

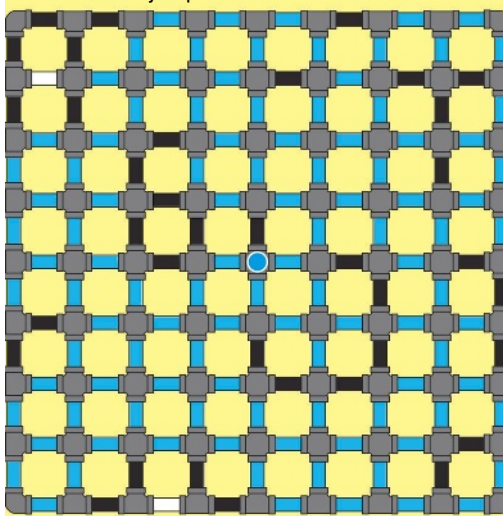
En fait, la probabilité qu'un réseau infini ait un amas infini est

Percolation dans un réseau carré

Si la probabilité est fixée à 1/3, chaque arête (un tuyau) a une chance sur trois d'être ouverte (en blanc). Dans cet exemple d'un réseau de 8×8 carrés, quand on verse de l'eau (en bleu) dans le nœud central, elle est bloquée après avoir atteint 6 autres nœuds.



Si la probabilité est fixée à 3/4, chaque arête (ou tuyau) a trois chances sur quatre d'être ouverte. Dans cet exemple d'un réseau de 8×8 carrés, quand on verse de l'eau dans le nœud central, elle s'écoule jusqu'au bord du réseau.



toujours égale soit à 0, soit à 1. Cela s'explique par le fait que le processus de percolation est soumis à un principe général de la théorie des probabilités appelé « loi du zéro-un », découvert par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov dans les années 1930. Imaginez que vous lancez une pièce un nombre infini de fois. La loi du zéro-un s'applique à toute question relative aux résultats obtenus pour laquelle la réponse ne dépend pas d'un nombre fini de lancers (par exemple, la réponse à la question « Êtes-vous tombé sur face un nombre infini de fois ? » ne changera pas si vous changez un nombre fini de lancers, ce qui n'est pas le cas de la réponse à la question « Êtes-vous tombé sur face au troisième lancer ? »).

La loi du zéro-un nous dit que des changements finis ne peuvent pas perturber des phénomènes qui sont intrinsèquement infinis. Ainsi, la probabilité de trouver un amas infini dans un réseau infini ne peut pas changer légèrement, comme de 0,81 à 0,82 ; elle doit prendre une des deux valeurs extrêmes, 0 ou 1. Autrement dit, soit un réseau infini n'aura pas d'amas infini (probabilité nulle de trouver un amas infini), soit il aura un amas infini (probabilité égale à 1).

Ainsi, fermer un nombre fini de tuyaux ouverts, ou inversement, n'a pas d'effet sur l'existence ou non d'un amas infini de tuyaux ouverts. La probabilité de trouver un amas ouvert infini est égale soit à 0, soit à 1. Mais alors, est-ce 0 ou est-ce 1 ?

TROUVER LE SEUIL

La réponse dépend du biais de la pièce avec laquelle vous tirez à pile ou face. Imaginez que vous ayez un bouton qui contrôle le biais. Quand vous tournez le bouton complètement vers la gauche, la pièce va toujours tomber sur « fermé ». Une fois que tous les tuyaux sont fermés, l'eau versée sur un nœud ne coulera nulle part, et la probabilité de trouver un amas infini sera nulle. À mesure que vous tournez le bouton dans le sens des aiguilles d'une montre, la probabilité que la pièce tombe sur « ouvert » augmente, et avec des lancers supplémentaires, il y aura de plus en plus de tuyaux ouverts. Quand le bouton est tourné complètement vers la droite, la pièce tombera toujours sur « ouvert », et finalement l'eau versée dans un nœud s'écoulera partout. La probabilité de trouver un amas infini vaut alors 1.