

beaucoup plus grosses, les polymères. Dans le cadre de la théorie de la percolation, chaque monomère constitue un nœud, et deux monomères voisins peuvent spontanément former une liaison, assimilée à une arête du réseau. Si la probabilité que deux monomères se lient augmente, le système finira par atteindre le seuil de percolation, et un unique polymère géant émergera. C'est ce processus qui est à l'œuvre quand de la gélatine en poudre dissoute dans de l'eau forme une gelée.

Les réseaux que l'on trouve dans de la roche fracturée ou dans les polymères liés sont extrêmement complexes. Il serait presque impossible de décrire précisément leur structure, mais Broadbent et Hammersley ont montré qu'on peut en faire une approximation sous forme de motifs répétitifs et qui se prêtent à l'analyse. L'exemple le plus simple est celui d'un réseau carré : les nœuds sont disposés aux points d'intersection d'un quadrillage, chacun étant connecté à ses voisins par quatre arêtes.

AMAS D'ÉLÉMENTS LIÉS

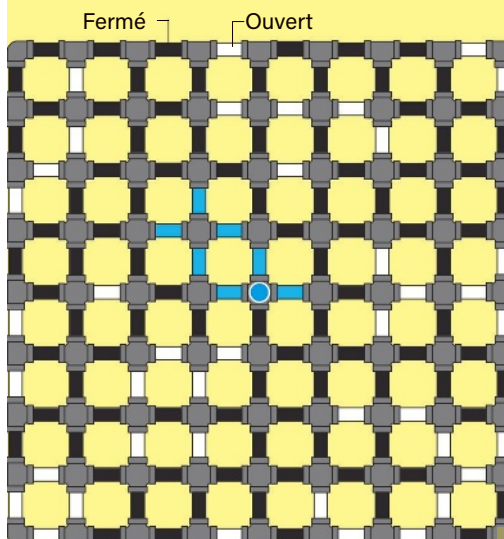
Pour voir comment un fluide se propagerait à travers un tel réseau, imaginons que chaque arête soit un tuyau, et que ce tuyau est soit ouvert, soit fermé. On peut choisir au hasard l'état de chaque tuyau en tirant à pile ou face. Le paysage résultant de tuyaux ouverts et fermés sera un réseau aléatoire, et il aura des amas « ouverts », dans lesquels tous les nœuds sont reliés par une série de tuyaux ouverts. **Si vous versez de l'eau dans n'importe lequel des nœuds d'un tel amas, elle va couler dans tous les tuyaux ouverts et atteindre tous les autres nœuds de l'amas.**

La théorie de la percolation s'intéresse à la connectivité du réseau, qui correspond à la grosseur des amas ouverts. Mais la « grosseur » est un concept ambigu et difficile à intégrer au formalisme mathématique. C'est pourquoi les mathématiciens remplacent souvent les grands nombres par des infinis. La question centrale devient alors : existe-t-il un amas infini ? « Pour nous, il est beaucoup plus facile de répondre à cette question binaire que de dire combien de gros amas de telle ou telle taille nous voyons », explique Benedikt Jahnel, mathématicien à l'institut Weierstrass d'analyse appliquée et de stochastique, à Berlin.

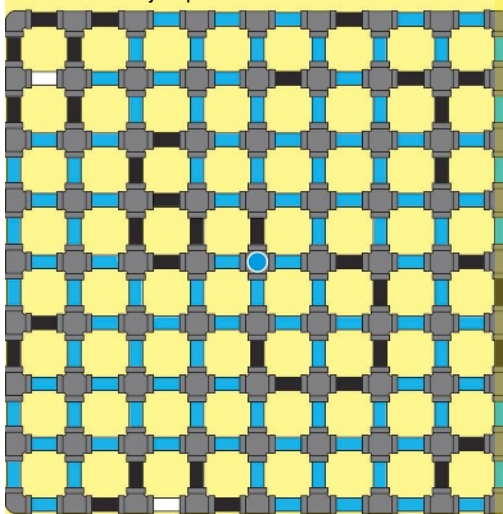
En fait, la probabilité qu'un réseau infini ait un amas infini est

Percolation dans un réseau carré

Si la probabilité est fixée à 1/3, chaque arête (un tuyau) a une chance sur trois d'être ouverte (en blanc). Dans cet exemple d'un réseau de 8×8 carrés, quand on verse de l'eau (en bleu) dans le nœud central, elle est bloquée après avoir atteint 6 autres nœuds.



Si la probabilité est fixée à 3/4, chaque arête (ou tuyau) a trois chances sur quatre d'être ouverte. Dans cet exemple d'un réseau de 8×8 carrés, quand on verse de l'eau dans le nœud central, elle s'écoule jusqu'au bord du réseau.



toujours égale soit à 0, soit à 1. Cela s'explique par le fait que le processus de percolation est soumis à un principe général de la théorie des probabilités appelé « loi du zéro-un », découvert par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov dans les années 1930. Imaginez que vous lancez une pièce un nombre infini de fois. La loi du zéro-un s'applique à toute question relative aux résultats obtenus pour laquelle la réponse ne dépend pas d'un nombre fini de lancers (par exemple, la réponse à la question « Êtes-vous tombé sur face un nombre infini de fois ? » ne changera pas si vous changez un nombre fini de lancers, ce qui n'est pas le cas de la réponse à la question « Êtes-vous tombé sur face au troisième lancer ? »).

La loi du zéro-un nous dit que des changements finis ne peuvent pas perturber des phénomènes qui sont intrinsèquement infinis. Ainsi, la probabilité de trouver un amas infini dans un réseau infini ne peut pas changer légèrement, comme de 0,81 à 0,82 ; elle doit prendre une des deux valeurs extrêmes, 0 ou 1. Autrement dit, soit un réseau infini n'aura pas d'amas infini (probabilité nulle de trouver un amas infini), soit il aura un amas infini (probabilité égale à 1).

Ainsi, fermer un nombre fini de tuyaux ouverts, ou inversement, n'a pas d'effet sur l'existence ou non d'un amas infini de tuyaux ouverts. La probabilité de trouver un amas ouvert infini est égale soit à 0, soit à 1. Mais alors, est-ce 0 ou est-ce 1 ?

TROUVER LE SEUIL

La réponse dépend du biais de la pièce avec laquelle vous tirez à pile ou face. Imaginez que vous ayez un bouton qui contrôle le biais. Quand vous tournez le bouton complètement vers la gauche, la pièce va toujours tomber sur « fermé ». Une fois que tous les tuyaux sont fermés, l'eau versée sur un nœud ne coulera nulle part, et la probabilité de trouver un amas infini sera nulle. À mesure que vous tournez le bouton dans le sens des aiguilles d'une montre, la probabilité que la pièce tombe sur « ouvert » augmente, et avec des lancers supplémentaires, il y aura de plus en plus de tuyaux ouverts. Quand le bouton est tourné complètement vers la droite, la pièce tombera toujours sur « ouvert », et finalement l'eau versée dans un nœud s'écoulera partout. La probabilité de trouver un amas infini vaut alors 1.

Si vous tournez lentement le bouton dans le sens des aiguilles d'une montre, la probabilité que les tuyaux soient ouverts augmente progressivement, et l'on pourrait s'attendre à ce que la probabilité de trouver un amas infini augmente également lentement de 0 à 1. En réalité, ce changement a lieu abruptement, à cause de la loi du zéro-un, qui indique que la probabilité ne peut pas être comprise entre 0 et 1. Pour le réseau carré, la probabilité passe de 0 à 1 quand le bouton est exactement au milieu (c'est-à-dire quand la pièce n'est pas biaisée). La position critique du bouton est ce qu'on appelle le «seuil de percolation». Quelle que soit la forme du réseau, qu'il s'agisse par exemple du réseau triangulaire ou du réseau cubique (version tridimensionnelle du réseau carré), la question essentielle de la théorie de la percolation reste la même: quelle est la valeur du seuil? Quel doit être le biais de la pièce afin que suffisamment de tuyaux soient ouverts pour garantir un amas ouvert infini?

La réponse dépend de la forme exacte du réseau (infini), et elle n'a rien de trivial. Pour un réseau carré, le seuil est égal à $1/2$ (autrement dit, dès que la probabilité qu'un tuyau soit ouvert est au moins égale à $1/2$, il y a un amas ouvert infini). Même ce résultat, qui porte sur le plus simple des réseaux, a été très difficile à prouver: ce n'est qu'en 1980 que le mathématicien d'origine allemande Harry Kesten y est parvenu. Et malgré des décennies d'efforts, les seuils exacts de percolation ne sont connus que pour quelques réseaux excessivement simples. «Il y a une foule de travaux réalisés juste pour trouver le seuil», explique Robert Ziff, de l'université du Michigan. «Le nombre de systèmes différents que l'on a étudiés est stupéfiant.» Ce chercheur en physique statistique a créé une page Wikipédia qui répertorie les seuils de percolation pour des centaines de réseaux différents. Le seuil pour le réseau triangulaire vaut approximativement 0,347, une valeur déterminée analytiquement, mais la vaste majorité des nombres figurant sur cette page (notamment le seuil de percolation du réseau cubique) sont des approximations obtenues au moyen de simulations sur ordinateur.

Les exemples de réseaux ci-dessus sont de bons modèles pour la percolation dans les systèmes physiques tels que les roches fracturées, où les pores ont des positions fixes avec des fissures les liant entre eux aléatoirement. Mais d'autres

exemples réels sont beaucoup plus compliqués. Dans les réseaux maillés FireChat et Bridgefy mentionnés plus haut, par exemple, la localisation des nœuds (les téléphones des manifestants de Hong Kong) changeait constamment. Les arêtes d'un tel réseau, c'est-à-dire ses connexions, se forment quand deux téléphones sont suffisamment proches l'un de l'autre, c'est-à-dire dans les limites de la portée de quelques dizaines de mètres des applications Bluetooth utilisées pour partager les messages. Ces réseaux sont décrits par un modèle différent, dit de «percolation continue», parce que les nœuds du réseau maillé peuvent se trouver n'importe où dans un espace continu.

PERCOLATION DANS DES RÉSEAUX DE NŒUDS MOBILES

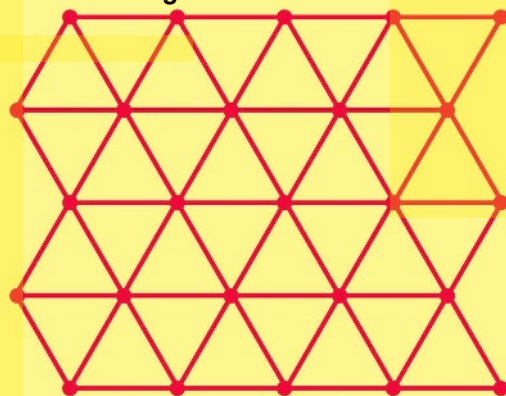
Comme tout modèle mathématique, la version abstraite de ce réseau est fondée sur des hypothèses simplifiées. Les téléphones sont dispersés aléatoirement, sans imiter les amas naturels ou les motifs observés sur une carte des déplacements de personnes, et deux télé-

phones sont reliés en ne tenant compte que de la distance qui les sépare, et pas de la présence éventuelle de murs ou d'autres interférences. Le modèle met néanmoins en lumière le rôle central de la théorie de la percolation dans les réseaux maillés réels.

Il y a deux façons d'augmenter la connectivité de ce réseau à percolation continue: permettre une connexion directe à plus longue portée, ou ajouter davantage de téléphones (autrement dit, augmenter la densité des utilisateurs). On peut envisager ces modifications comme des «boutons» jouant un rôle similaire à ceux du réseau de tuyaux; en les tournant vers la droite, on augmente la connectivité. Et dans ces modèles, «il existe un point de bascule qui fait passer de la connectivité locale à la connectivité globale», explique Benedikt Jahnel.

Pour les concepteurs d'applications de réseaux maillés, trouver le seuil de percolation est un problème d'ingénierie pratique. Changer la puissance de l'appareil, qui contrôle la portée, est une façon de tourner le bouton. La question centrale, explique Ram Ramanathan, chercheur principal au sein de l'entreprise américaine de réseaux maillés goTenna, est: «Quelle est la puissance émettrice dont vous avez besoin pour avoir un réseau connecté?» La réponse serait

Réseau triangulaire



Réseau cubique

